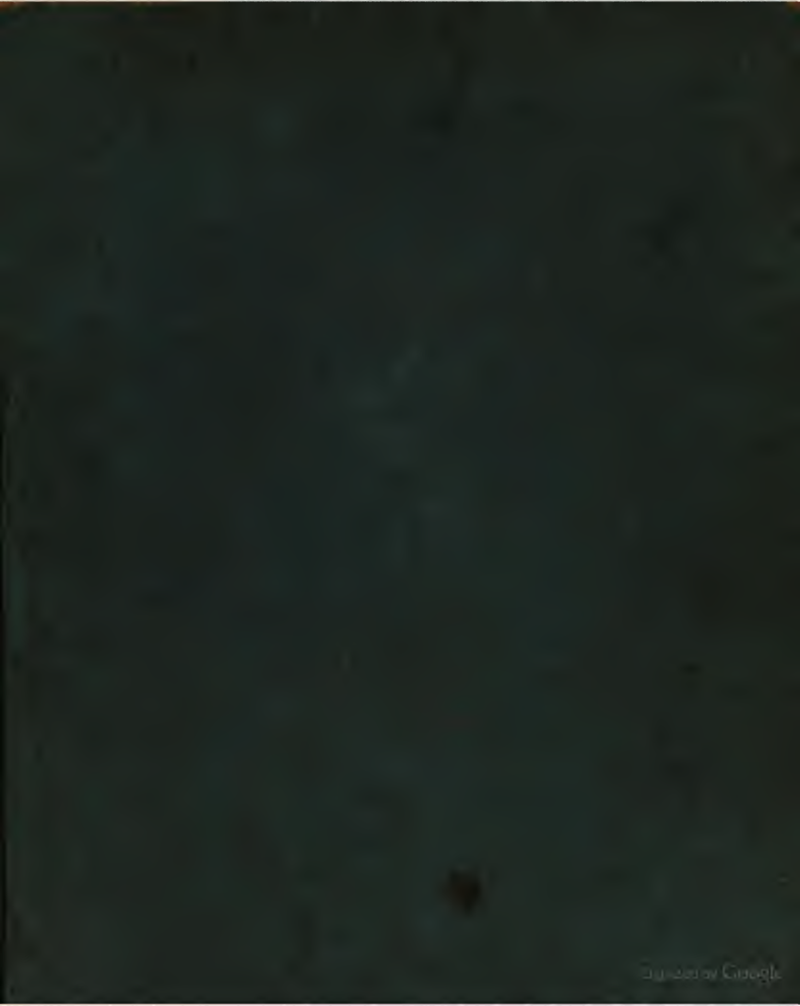



AUS FEUER UND WASSER GERETTET
BEIM GROSSEN BRANDE DER
BAYERISCHEN STAATSBIBLIOTHEK
IM MÄRZ DES KRIEGSJAHRES 1943



ABHANDLUNGEN

DER

KÖNIGLICHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU GÖTTINGEN.

DREIZEHNTER BAND

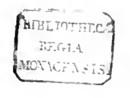
VON DEN JAHREN 1866 UND 1867.

MIT EINER KARTE UND VIER TAFELN.

GÖTTINGEN,

IN DER DIETERICHSCHEN BUCHHANDLUNG.

1868.


BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS

Vorrede.

Der vorliegende dreizehnte Band der Schriften der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen enthält die Abhandlungen, welche von ihren Mitgliedern und Assessoren in der zweiten Hälfte des J. 1866 und im J. 1867 in den Sitzungen der Societät theils vorgelesen, theils derselben vorgelegt worden sind. Auszüge daraus, sowie die kleineren der Societät mitgetheilten Abhandlungen, sind in den „Nachrichten von der K. Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universität" veröffentlicht worden.

Das jährlich unter den drei ältesten Mitgliedern der drei Classen wechselnde Directorium verwalteten wie bisher die Herren ***Marx***, ***Weber*** und ***Ewald***.

Von ihren Ehrenmitgliedern verlor die Societät in diesem Zeitraum durch den Tod:

Prinz ***Maximilian zu Wied***, gestorben am 3. Februar 1866 im 84. Lebensjahre zu Neuwied, seit 1826 Ehrenmitglied.

Von den auswärtigen Mitgliedern und Correspondenten:

V. ***Cousin*** in Paris, gest. am 14. Januar d. J. im 74. Lebensjahre, Mitglied der hist.-phil. Classe.

L. ***Häusser*** in Heidelberg, gest. am 17. März d. J. 49 Jahre alt, Correspondent der hist.-phil. Classe.

F. ***Tuch*** in Leipzig, gest. am 12. April d. J. 50 Jahre alt, Correspondent der hist.-phil. Classe.

J. J. ***Champollion-Figeac*** in Fontainebleau, gest. am 9. Mai d. J. 89 Jahre alt, Correspondent der hist.-phil. Classe.

E. ***Gerhard*** in Berlin, gest. am 12. Mai d. J. 71 Jahre alt, Mitglied der hist.-phil. Classe.

Th. J. ***Pelouze*** in Paris, gest. am 31. Mai d. J. 61 Jahre alt, Correspondent der physik. Classe.

W. ***Lawrence*** in London, gest. am 1. Juli d. J. 84 Jahre alt, Correspondent der physik. Classe.

Ch. A. ***Brandis*** in Bonn, gest. am 24. Juli d. J. 78 Jahre alt, Mitglied der hist.-phil. Classe.

A. ***Boeckh*** in Berlin gest. am 3. August d. J. 82 Jahre alt, Mitglied der hist.-phil. Classe.

M. ***Faraday*** in London, gest. am 25. August d. J. 75 Jahre alt, Mitglied der physik. Classe.

F. ***Bopp*** in Berlin, gest. am 23. October d. J. 76 Jahre alt, Mitglied der hist.-phil. Classe.

A. ***von Vogel*** in München, gest. am 24. November d. J. 90 Jahre alt, Correspondent der physik. Classe.

L. C. ***Bethmann*** in Wolfenbüttel, gest. am 5. December d. J. Correspondent der hist.-phil. Classe.

Von den Assessoren schied Herr F. ***Beilstein*** aus, einem Rufe nach St. Petersburg folgend.

Zum hiesigen ordentlichen Mitgliede für die physika-

lische Classe wurde erwählt und vom K. Universitäts-Curatorium bestätigt der seitherige Assessor:

Herr Wilhelm ***Keferstein.***

Zu Ehrenmitgliedern wurden erwählt und vom K. Curatorium bestätigt:

die Herren Carl ***Stüve*** in Osnabrück.
Adolph ***von Warnstedt*** in Hannover.
Theodor Georg ***von Karajan*** in Wien.
Johann Jacob ***Baeyer*** in Berlin.

Zu auswärtigen Mitgliedern wurden erwählt und vom K. Curatorium bestätigt:

die Herren Theodor Ludw. Wilhelm ***Bischoff*** in München, phys. Cl.
Christoph Fr. ***von Stälin*** in Stuttgart, hist.-phil. Cl.
Leopold ***Kronecker*** in Berlin, mathem. Classe.
Otto ***Jahn*** in Bonn, hist.-philol. Classe.
Richard ***Lepsius*** in Berlin, hist.-phil. Classe.
Theodor ***Mommsen*** in Berlin, hist.-phil. Classe.
sämmtlich seither Correspondenten.

Zu Correspondenten wurden ernannt:

die Herren Ferdinand ***Müller*** in Melbourne, phys. Classe.
Rud. Jul. Emmanuel ***Clausius*** in Würzburg, math. Cl.
Erik ***Edlund*** in Stockholm, math. Classe.
Georg ***Quincke*** in Berlin, math. Classe.
Leopold Victor ***Delisle*** in Paris, hist.-phil. Classe.
Julius ***Ficker*** in Innsbruck, hist.-phil. Classe.
Anton ***Geuther*** in Jena, phys. Classe.
Charles ***Briot*** in Paris, math. Classe.
Benj. Apthorp ***Gould*** in Cambridge, V. St., math. Cl.
Rudolph ***Lipschitz*** in Bonn, math. Classe.

Benjamin ***Peirce*** in Cambridge, V. St., math. Classe.
Friedr. Magnus ***Schwerd*** in Speyer, math. Classe.
Jacob ***Bernays*** in Bonn, hist.-phil. Classe.
Johannes ***Brandis*** in Berlin, hist.-phil. Classe.
Eduard ***Dümmler*** in Halle, hist.-phil. Classe.
B. ***Huillard-Bréholles*** in Paris, hist-phil. Classe.
Wilhelm ***Nitzsch*** in Königsberg, hist.-phil. Classe.

Zu Assessoren wurden ernannt:
die Herren Wilhelm ***Henneberg***, phys. Classe.
Friedrich ***Kohlrausch***, math. Classe.
Carl ***Hattendorff***, math. Classe.

An den Herrn F. G. ***Welcker*** in Bonn, der gegenwärtig der K. Societät seit 50 Jahren als Mitglied angehört, richtete dieselbe zur Feier dieses seltenen Jubiläums ein Glückwunschschreiben, das in Nr. 26 der Nachrichten d. J. abgedruckt ist.

Die in dem Zeitraum von der Mitte 1866 bis Ende 1867 in den Sitzungen der K. Societät vorgetragenen oder vorgelegten Abhandlungen und kleineren Mittheilungen sind folgende:

1866.

Am 7. Novemb. ***Kölle***, (durch Ewald), Bemerkungen über Zahlen-Etymologie. (Nachrichten Seite 311.)
Waitz, über die sogenannten Annales Ottenburani und die Annales Elwangenses. (Nachr. S. 299.)
Enneper. über die developpabele Fläche, welche zwei gegebenen Flächen umschrieben ist. (Nachr. S. 321.)

Am 5. Decemb. Feier des Stiftungstags und Jahresbericht. (Nachr. S. 339.)
Ewald, über eine phönikische Inschrift. (Nachr. S. 348.)
Sauppe, über die Quellen Plutarchs für das Leben des Perikles. (Bd. XIII.)

Schering, zum Gedächtniss an Riemann. (Auszug in Nachr. 1867. S. 305.)

1867.

Am 5. Januar. *Wöhler*, über das sogenannte graphitförmige Bor. (Nachrichten Seite 1.)

Waitz, über das Speculum regum des Gotfried von Viterbo. (Nachr. S. 4.)

Listing, meteorologische Ergebnisse aus zehnjährigen Beobachtungen in Göttingen. (Nachr. S. 27.)

Am 2. Februar. *Wöhler*, über einen Meteorstein aus Mexico. (Nachr. S. 57.)

Sartorius v. Waltershausen, die photographische Nachbildung seiner Karte des Aetna. (Nachr. S. 71.)

Fittig, über die Cyanverbindungen des Mangans, über Derivate des Methylens und über Zersetzung des Camphers. (Nachr. S. 59.)

Enneper, allgemeine Gleichungen für Linien auf developpabeln Flächen. (Nachr. S. 73.)

Marmé (durch Meissner), über die Giftigkeit einiger Cadmium-Verbindungen. (Nachr. S. 96.)

Am 9. März. *Waitz*, über die Linköpinger Handschrift des Hermann Korner. (Nachr. S. 113.)

Sauppe, der Tod des Pheidias. (Nachr. S. 173.)

Derselbe, zwei neue Inschriften aus Athen. (Nachr. S. 146.)

Benfey, über die Pluralbildung des Indogermanischen Verbum. (Bd. XIII.)

Hasse, (durch Henle), über den Bau der Retina. (Nachrichten S. 130.)

Marmé, (durch Meissner), über Convallamarin. (Nachrichten Seite 160.)

Fittig, über die Oxydationsproducte des Aethyl- und Diäthyl-Benzols. (Nachr. S. 125.)

Enneper, Reduction eines vielfachen Integrals. (Nachr. S. 164).

Wedekindsche Preisstiftung, Preisaufgaben für deutsche Geschichte. (Nachr. S. 137.)

Am 4. Mai. *Ewald*, über neuentdeckte Samarische Lesezeichen. (Nachrichten S. 221.)

Hasse, (durch Henle), über die Endigungsweise des N. acusticus im Labyrinth der Vögel. (Nachr. S. 197.)

Stern, über die Bestimmung der Constanten in der Variationsrechnung. (Bd. XIII u. Nachr. S. 218.)

Ehlers, über die Gattung Heteronereis und ihr Verhältniss zu Nereis und Nerei lepar. (Nachr. S. 209.)

Enneper, analytisch geometrische Untersuchungen. (Nachrichten Seite 252.)

Benfey, über den linguistischen Theil aus der Reise der östr. Fregatte Novara.

Am 1. Juni. *Curtius*, zum Andenken an E. Gerhard. (Nachr. S. 265.)

Wöhler, über Anatas in einem Oolitheisenstein. (Nachrichten Seite 274.)

Enneper, analytisch geometrische Untersuchungen. (Nachrichten Seite 277.)

Am 13. Juli. *Keferstein*, über einige neue oder seltene Batrachier aus Australien und dem tropischen Amerika. (Nachr. S. 339.)

Kupffer, (durch Keferstein) über die Bildung des Embryo im Ei der Knochenfische. (Nachr. S. 317.)

Wöhler, Notiz über ein norwegisches Mineral. (Nachr. S. 362.)

Stern, Notiz über das Sternbild Nectar bei Eratosthenes. (Nachrichten Seite 363.)

Fittig, über Derivate des Xylols und des synthetisch dargestellten Dimethylbenzols. (Nachr. S. 365.)

Derselbe, über das Isoxylol. (Nachr. S. 372.)

v. Seebach, zur Kritik der Gattung Myophoria Bronn und ihrer triasinischen Arten. (Nachr. S. 375.)

Am 3. August. *Waitz*, über den falschen Text des Friedens von Venedig 1177. (Nachr. S. 389.)

Marmé, (durch Meissner), über die Wirkung des Thalliums. (Nachrichten Seite 395.)

Am 2. Novbr. *Wöhler*, zur Kenntniss des Ceriums. (Nachr. S. 425.)
Derselbe, über eine Verbindung von Thalliumchlorür mit Eisenchlorid.
Listing, über einige Anwendungen des Census-Theorems. (Nachrichten Seite 430.)
Husemann (durch Grisebach), zur Pharmakologie der Euphorbiaceen. (Nachr. S. 450.)
Enneper, zur Theorie der windschiefen Flächen. (Nachrichten Seite 454.)
Fittig, über die Existenz des normalen Propylalkohols und einige Derivate desselben. (Nachr. S. 505.)

Am 7. Decbr. Feier des Stiftungstags und Jahresbericht. (Nachr. S. 529.)
Ewald, zum Gedächtniss von Bopp u. Tuch. (Nachr. S. 550.)
Curtius, zum Gedächtniss von Boeckh und Brandis. (Nachrichten Seite 552.)
Schering, zum Gedächtniss von Gauss (erscheint in den Abhandlungen).

Die für den November 1867 von der mathematischen Classe gestellte Preisfrage: „durch Versuche zu entscheiden, ob in einem polarisirten Lichtstrahl der Winkel zwischen der Vibrationsebene und der Polarisationsebene Null oder 90° sei“ hat keinen Bearbeiter gefunden.

Für die nächsten Jahre werden von der K. Gesellschaft folgende Preisaufgaben gestellt:

Für den November 1868 von der historisch-philologischen Classe:

Qui literas antiquas tractant, res Graecorum et Romanorum duobus disciplinarum singularum ordinibus seorsum explicare solent. Quae separatio quanquam necessaria est, tamen quanta eadem incommoda habeat, facile est ad intelligendum; quae enim communia sint in utriusque cultura populi, quominus perspiciamus, impedit, quae ab altero instituta sunt, cum quibus alterius vel inventis vel institutis necessaria quadam et perpetua causarum efficientia cohaereant, ne

intelligamus, graviter obstat, denique quae in historia rerum coniuncta sunt, seiungit. Quare omnia ea, quibus res utriusque populi inter se cohaerent, accurate inquiri haud levis videtur momenti esse. Quod cum Graeciae et Italiae incolas primitus inter se cognatos fuisse linguarum historiae scrutatores luculenter docuerint atque ex altera parte, quomodo cultura Graecorum et Romanorum initio Scipionum temporibus facto Caesarum aetate prorsus denique in unum coaluerit, accuratissime homines docti explicaverint, Societas regia literarum et gratum et fructuosum futurum esse existimat, quaenam vestigia rerum graecarum prioribus populi romani aetatibus appareant, studiose indagari et, quibus potissimum temporibus inde a regum aetate singula huius efficientiae genera ostendantur, a quibus ea regionibus et urbibus (Cumis, Sicilia, Massalia, Athenis, Corintho) profecta sint, denique quae ita praesertim in sermone, artibus, literis, institutis publicis conformandis effecta sint, quantum quidem fieri potest, explicari. Quae quaestiones quanquam uno impetu absolvi non poterunt, tamen ad historiam veteris culturae rectius et plenius intelligendam multum videntur conferre posse. Societas igitur regia postulat, ut explicetur:

> quam vim res graecae in sermone, artibus, literis, institutis publicis Romanorum conformandis atque excolendis ante macedonicorum tempora bellorum habuerint.

„Die klassische Philologie ist gewohnt das griechische und das römische Alterthum in zwei gesonderten Reihen von Disciplinen zu behandeln. Diese Trennung ist nothwendig, aber sie hat auch ihre unverkennbaren Nachtheile; denn sie erschwert den Ueberblick über das Gemeinsame in der Kultur der Griechen und Römer, lässt die Kontinuität der Entwicklung nicht erkennen und zerreisst das geschichtlich Zusammengehörige. Es ist daher wichtig die Berührungspunkte und Wechselbeziehungen in der Entwicklung beider Völker ins Auge zu fassen. Nachdem nun sprachgeschichtliche Untersuchungen über die ursprüngliche Verwandtschaft derselben neues Licht verbreitet haben (die gräko-italische Epoche) und auf der andern Seite die Verschmelzung der griechischen und römischen Cultur, wie sie in der Zeit der Scipionen begonnen und unter den Cäsaren sich vollendet hat (hellenistische Epoche), mit Erfolg durchforscht und dargestellt worden ist, so scheint es der K. Ges. d. Wiss. eine anziehende und lohnende Aufgabe zu sein, den Spuren griechischer Einwirkung, welche sich in den früheren Perioden der römischen Geschichte zeigen, sorgfältig nachzugehn und, so weit es möglich ist, die verschiedenen Epochen dieser Einwirkung, von der Königszeit an, ihre verschiedenen Ausgangspunkte (Kumä, Sicilien, Massalia, Athen, Korinth), und die Ergebnisse derselben, namentlich auf dem Gebiete der Sprache, der Kunst, der Literatur, und des öffentlichen Rechts zu ermitteln. Wenn auch

diese Untersuchung sich nicht sogleich zu einem Abschluss führen lässt, so verspricht sie doch sehr erhebliche Ausbeute für die Geschichte der alten Kultur. In diesem Sinne stellt die K. Ges. d. Wiss. die Aufgabe:

Darstellung der hellenischen Einflüsse, welche sich in der Sprache, der Kunst, der Literatur und dem öffentlichen Rechte der Römer vor der Zeit der makedonischen Kriege erkennen lassen."

Für den November 1869 von der physikalischen Classe:

R. S. postulat, ut viarum lacrymalium structura omnis, comparandis cum homine animalibus, illustretur, praecipue vero de iis exponatur apparatibus, qui absorbendis et promovendis lacrymis inservire dicuntur, de epithelio, de valvulis, de musculis, et plexibus venosis ductui lacrymali vel innatis vel adjacentibus.

„Die K. Societät verlangt eine vergleichend-anatomische Beschreibung des Thränen leitenden Apparats, mit besonderer Berücksichtigung der Einrichtungen, welche bei der Aufsaugung und Förderung der Thränenflüssigkeit in Betracht kommen, des Epithelium, der Klappen, der Muskeln und Gefässgeflechte in den Wänden der Thränenwege und deren Umgebung."

Für den November 1870 von der mathematischen Classe:

Fourier, vir illustrissimus, operis, quod de resolutione aequationum scripsit, libro ultimo, non evulgato, de theoria inaequalitatum (analyse des inégalités) tractaturus erat. Societas regia optat, ut libri summa restituatur, adhibitis eis, quae ill. Fourier et in expositione synoptica operi praemissa et in memoriis Acad. Scient. Paris. hac de re significavit.

„Das letzte nicht erschienene Buch des Fourier'schen Werkes über Gleichungen sollte die Theorie der Ungleichheiten (analyse des inégalités) enthalten. Die K. Ges. d. W. wünscht die Wiederherstellung des wesentlichen Inhalts dieses Buches, nach den Andeutungen, welche Fourier in der dem Werke vorausgeschickten Inhaltsübersicht und in den Schriften der Pariser Akad. d. W. gegeben hat."

Die Concurrenzschriften müssen vor Ablauf des Septembers der bestimmten Jahre an die K. Gesellschaft der Wissenschaften portofrei eingesandt sein, begleitet von einem versiegelten Zettel, welcher den Namen und Wohnort des Verfassers enthält, und mit dem Motto auf dem Titel der Schrift versehen ist.

Der für jede dieser Aufgaben ausgesetzte Preis beträgt funfzig Ducaten.

* * *

Die von dem Verwaltungsrath der Wedekind'schen Preisstiftung für deutsche Geschichte gestellten Aufgaben für den dritten Verwaltungszeitraum, d. h. für die Zeit vom 14. März 1866 bis zum 14. März 1876, sind in Nr. 9 Seite 138 der „Nachrichten" von 1867 bekannt gemacht worden.

Göttingen, im December 1867.

F. Wöhler.

Verzeichniss der Mitglieder

der

Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen.

Januar 1868.

Ehren-Mitglieder.

Peter Merian in Basel, seit 1862.
Carl Stüve in Osnabrück, seit 1866.
Adolph von Warnstedt in Hannover, seit 1867.
Theodor Georg von Karajan in Wien, seit 1867.
Johann Jacob Baeyer in Berlin, seit 1867.

Ordentliche Mitglieder.

Physikalische Classe.

C. F. H. Marx, seit 1833.
F. Wöhler, seit 1837. Beständiger Secretair seit 1860.
F. Gottl. Bartling, seit 1843.
A. Grisebach, seit 1851.
F. G. J. Henle, seit 1853.
W. Sartorins von Waltershansen, seit 1856.
G. Meissner, seit 1861.
W. Keferstein, seit 1866.

Mathematische Classe.

W. E. Weber, seit 1831.
G. C. J. Ulrich, seit 1845.
J. B. Listing, seit 1861.
M. Stern, seit 1862.
E. Schering, seit 1862. (Zuvor Assessor seit 1860).

Historisch - philologische Classe.

H. Ewald, seit 1833.
H. Ritter, seit 1840.

C. Hoeck, seit 1841.
G. Waitz, seit 1849.
W. Havemann, seit 1850. (Zuvor Assessor, seit 1841.)
E. Curtius, seit 1856.
H. F. Wüstenfeld, seit 1856. (Zuvor Assessor, seit 1841.)
H. Sauppe, seit 1857.
J. E. Wappäus, seit 1860. (Zuvor Assessor, seit 1851.)
Th. Benfey, seit 1864.

Assessoren.

Physikalische Classe.

E. F. G. Herbst, seit 1835.
C. Boedeker, seit 1857.
W. Wicke, seit 1859.
R. Fittig, seit 1864.
C. von Seebach, seit 1864.
W. Krause, seit 1865.
E. Ehlers, seit 1865.
W. Henneberg, seit 1867.

Mathematische Classe.

E. F. W. Klinkerfues, seit 1855.
A. Enneper, seit 1865.
F. Kohlrausch, seit 1867.
C. Hattendorff, seit 1867.

Auswärtige Mitglieder.

Physikalische Classe.

Sir James Clark in London, seit 1837.
Carl Ernst von Baer in St. Petersburg, seit 1851.
Jean Baptiste Dumas in Paris, seit 1851. (Zuvor Correspondent, seit 1849.)
Christian Gottfried Ehrenberg in Berlin, seit 1851.
Carl Friedrich von Martius in München, seit 1851.
Justus Freiherr von Liebig in München, seit 1851. (Zuvor Corresp., seit 1840.)
Ernst Heinrich Weber in Leipzig, seit 1851.
Carl Friedrich Theodor Krause in Hannover, seit 1852.
Wilhelm von Haidinger in Wien, seit 1853.

Carl Friedrich Naumann in Leipzig, seit 1853.
Robert Bunsen in Heidelberg, seit 1855.
Elie de Beaumont in Paris, seit 1855.
Gustav Rose in Berlin, seit 1856.
Gustav Magnus in Berlin, seit 1857.
Louis Agassiz in Boston, seit 1859.
Richard Owen in London, seit 1859.
Adolph Brongniart in Paris, seit 1860.
August Wilh. Hofmann in Berlin, seit 1860.
H. Milne Edwards in Paris, seit 1861.
Hermann Kopp in Heidelberg, seit 1863. (Zuvor Corresp., seit 1855.)
Carl Theodor von Siebold in München, seit 1864. (Zuvor Corresp., seit 1850.).
Michel Eugène Chevreul in Paris, seit 1865.
Joseph Dalton Hooker zu Kew bei London, seit 1865.
Theod. Ludw. Wilh. Bischoff in München, seit 1866. (Zuvor Corresp. seit 1853.)

Mathematische Classe.

Sir David Brewster in Edinburgh, seit 1826.
Sir John Herschel in Collingwood, seit 1840. (Zuvor Corresp., seit 1815.)
U. J. Leverrier in Paris, seit 1846.
P. A. Hansen in Gotha, seit 1849.
George Biddel Airy in Greenwich, seit 1851.
Charles Wheatstone in London, seit 1854.
Joseph Liouville in Paris, seit 1856.
E. Kummer in Berlin, seit 1856. (Zuvor Corresp., seit 1851.)
F. E. Neumann in Königsberg, seit 1856.
Henri Victor Regnault in Paris, seit 1859.
William Hallows Miller in Cambridge, seit 1859.
Edward Sabine in London, seit 1862. (Zuvor Corresp., seit 1823.)
C. A. von Steinheil in München, seit 1862. (Zuvor Corresp., seit 1837.)
Christoph Hansteen in Christiania, seit 1862. (Zuvor Corresp., seit 1840.)
Richard Dedekind in Braunschweig, seit 1862. (Zuvor Corresp., seit 1859.)
Aug. Robert Kirchhoff in Heidelberg, seit 1862.
Heinrich Wilhelm Dove in Berlin, seit 1864. (Zuvor Corresp., seit 1849.)
August Ferdinand Möbius in Leipzig, seit 1864. (Zuvor Corresp., seit 1846.)
Johann Christian Poggendorff in Berlin, seit 1864. (Zuvor Corresp., seit 1854.)
William Thomson in Glasgow, seit 1864. (Zuvor Corresp., seit 1859.)

Ferdinand Reich in Freiberg, seit 1864.
Heinrich Buff in Giessen, seit 1865. (Zuvor Corresp., seit 1842.)
Carl Weierstrass in Berlin, seit 1865. (Zuvor Corresp., seit 1856.)
Enrico Betti in Pisa, seit 1865.
Leopold Kronecker in Berlin, seit 1867. (Zuvor Corresp., seit 1861.)

Historisch-philologische Classe.

Fr. Gottl. Welcker in Bonn, seit 1819. (Zuvor hies. ord. Mitglied, seit 1817.)
Im. Bekker in Berlin, seit 1835.
G. H. Pertz in Berlin, seit 1837.
François Guizot in Paris, seit 1841.
Leopold Ranke in Berlin, seit 1851.
Justus Olshausen in Berlin, seit 1853.
Christian Lassen in Bonn, seit 1860. (Zuvor Correspondent, seit 1850.)
Georg Friedr. Schömann in Greifswald, seit 1860. (Zuvor Corresp., seit 1850.)
Gottfried Bernhardy in Halle, seit 1860. (Zuvor Correspondent, seit 1854.)
Friedrich Ritschl in Leipzig, seit 1860. (Zuvor Correspondent, seit 1854.)
Wilhelm Wackernagel in Basel, seit 1860. (Zuvor Correspondent, seit 1855.)
August Meineke in Berlin, seit 1860.
Georg Gottfried Gervinus in Heidelberg, seit 1862.
Adolph Trendelenburg in Berlin, seit 1861.
Georg Ludwig von Maurer in München, seit 1863. (Zuvor Corresp., seit 1835.)
Samuel Birch in London, seit 1864.
Friedrich Diez in Bonn, seit 1864.
Christoph Friedrich von Stälin in Stuttgart, seit 1866. (Zuvor Corresp., seit 1857.)
Otto Jahn in Bonn, seit 1867. (Zuvor Corresp., seit 1857.)
Theodor Mommsen in Berlin, seit 1867. (Zuvor Corresp., seit 1857.)
Richard Lepsius in Berlin, seit 1867. (Zuvor Corresp., seit 1860.)

Correspondenten.

Physikalische Classe.

E. Eichwald in St. Petersburg, seit 1841.
Robert Willis in London, seit 1844.
De Medici Spada in Rom, seit 1847.
Hermann Stannius in Rostock, seit 1850.
Theodor Schwann in Lüttich, seit 1853.
Theodor Scheerer in Freiberg, seit 1853.

Wilhelm Duncker in Marburg, seit 1853.
G. A. Carl Städeler in Zürich, seit 1853. (Zuvor Assessor, seit 1851.)
Anton Schrötter in Wien, seit 1856.
Henri Sainte Claire Deville in Paris, seit 1856.
Axel Erdmann in Stockholm, seit 1857.
L. Zeuschner in Warschau, seit 1857.
Heinrich Helmholtz in Heidelberg, seit 1859.
Johannes Hyrtl in Wien, seit 1859.
Nicolai von Kokscharow in St. Petersburg, seit 1859.
Rudolph Leuckart in Giessen, seit 1859.
Eduard Weber in Leipzig, seit 1860.
Alfred Wilh. Volkmann in Halle, seit 1860.
F. H. Bidder in Dorpat, seit 1860.
Carl Schmidt in Dorpat, seit 1860.
F. C. Donders in Utrecht, seit 1860.
J. van der Hoeven in Leyden, seit 1860.
Joh. Jap. Sm. Steenstrup in Kopenhagen, seit 1860.
Hermann von Meyer in Frankfurt a. M., seit 1860.
Bernhard Studer in Bern, seit 1860.
Heinrich Limpricht in Greifswald, seit 1860. (Zuvor Assessor, seit 1857.)
Ernst Brücke in Wien, seit 1861.
Emil du Bois Reymond in Berlin, seit 1861.
Alexander Braun in Berlin, seit 1861.
Franz von Kobell in München, seit 1861.
Carl Ludwig in Leipzig, seit 1861.
Hugo von Mohl in Tübingen, seit 1861.
Christian Friedrich Schönbein in Basel, seit 1861.
Archangelo Scacchi in Neapel, seit 1861.
Quintino Sella in Turin, seit 1861.
Thomas H. Huxley in London, seit 1862.
Albert Kölliker in Würzburg, seit 1862.
Ferdinand Römer in Breslau, seit 1862.
Charles Upham Shepard in Amherst, V. St., seit 1862.
Adolph Strecker in Tübingen, seit 1862.
Heinrich Credner in Berlin, seit 1863.
Alexander Ecker in Freiburg, seit 1863.
Joh. Friedr. August Breithaupt in Freiberg, seit 1864.
Bernhard von Cotta in Freiberg, seit 1864.

Friedrich Adolph Römer in Clausthal, seit 1864.
Alvaro Reynoso in Havanna, seit 1865.
Ferdinand Müller in Melbourne, seit 1867.
Anton Geuther in Jena, seit 1867.

Mathematische Classe.

A. Quetelet in Brüssel, seit 1837.
Humphrey Lloyd in Dublin, seit 1843.
F. G. A. Argelander in Bonn, seit 1846.
C. A. F. Peters in Altona, seit 1851.
John Couch Adams in Cambridge, seit 1851.
Thomas Clausen in Dorpat, seit 1854.
Ludwig Seidel in München, seit 1854.
Georg Rosenhain in Königsberg, seit 1856.
Otto Hesse in Heidelberg, seit 1856.
Peter Riess in Berlin, seit 1856.
John Tyndall in London, seit 1859.
Charles Hermite in Paris, seit 1861.
Julius Schmidt in Athen, seit 1862.
Carl Wilhelm Borchardt in Berlin, seit 1864.
Arthur Cayley in Cambridge, seit 1864.
August Clebsch in Giessen, seit 1864.
Andreas von Ettingshausen in Wien, seit 1864.
Wilhelm Gottlieb Hankel in Leipzig, seit 1864.
Moritz Hermann von Jacobi in Petersburg, seit 1864.
Philipp Gustav Jolly in München, seit 1864.
Carl Hermann Knoblauch in Halle, seit 1864.
Carl Neumann in Tübingen, seit 1864.
Julius Plücker in Bonn, seit 1864.
Georg Gabriel Stokes in Cambridge, seit 1864.
James Joseph Sylvester in Woolwich, seit 1864.
Heinrich Eduard Heine in Halle, seit 1865.
Rudolph Jul. Emanuel Clausius in Würzburg, seit 1866.
Erik Edlund in Stockholm, seit 1866.
Georg Quincke in Berlin, seit 1866.
Charles Briot in Paris, seit 1867.
Benj. Apthorp Gould in Cambridge V. St. seit 1867.
Rudolph Lipschitz in Bonn, seit 1867.

Benjamin Peirce in Cambridge V. St. seit 1867.
F. Magnus Schwerd in Speyer, seit 1867.

Historisch-philologische Classe.

Freiherr C. L. von Lützow in Schwerin, seit 1835.
A. Huber in Wernigerode, seit 1837.
F. E. G. Roulez in Gent, seit 1841.
Rudolph Roth in Tübingen, seit 1853.
Adolph Friedr. Heinr. Schaumann in Hannover, seit 1853.
August Dillmann in Giessen, seit 1857.
J. G. Droysen in Berlin, seit 1857.
Moritz Haupt in Berlin, seit 1857.
Wilh. Henzen in Rom, seit 1857.
Carl Hegel in Erlangen, seit 1857.
G. C. F. Lisch in Schwerin, seit 1857.
A. B. Rangabé in Athen, seit 1857.
B. von Dorn in St. Petersburg, seit 1859.
L. P. Gachard in Brüssel, seit 1859.
Johann Gildemeister in Bonn, seit 1859.
Franz Palacky in Prag, seit 1859.
Theodor Bergk in Halle, seit 1860.
Carl Bötticher in Berlin, seit 1860.
Georg Curtius in Leipzig, seit 1860.
K. Lehrs in Königsberg, seit 1860.
Giovanni Battista de Rossi in Rom, seit 1860.
Leonhard Spengel in München, seit 1860.
Heinrich Ludolf Ahrens in Hannover, seit 1861.
Carl Ludwig Grotefend in Hannover, seit 1861.
Ernst Jul. Georg von dem Knesebeck in München, seit 1861.
Max Müller in Oxford, seit 1861.
Arnold Schäfer in Bonn, seit 1861.
Friedr. Ferdin. Carlson in Stockholm, seit 1863.
Wilhelm Giesebrecht in München, seit 1863.
Martin Haug in Stuttgart, seit 1863.
Ludwig Lange in Giessen, seit 1863.
Heinrich von Sybel in Bonn, seit 1863.
Theodor Nöldeke in Kiel, seit 1864. (Zuvor Assessor, seit 1860.)
Hermann Bonitz in Berlin, seit 1865.

Jacob Burckhardt in Basel, seit 1865.
Adolph Kirchhoff in Berlin, seit 1865.
Leo Meyer in Dorpat, seit 1865. (Zuvor Assessor, seit 1861.)
Matthias de Vries in Leiden, seit 1865.
Wilhelm Wattenbach in Heidelberg, seit 1865.
Jean de Witte in Paris, seit 1865.
Leopold Victor Delisle in Paris, seit 1866.
Julius Ficker in Innsbruck, seit 1866.
Jacob Bernays in Bonn, seit 1867.
Johannes Brandis in Berlin, seit 1867.
Ernst Dümmler in Halle, seit 1867.
B. Huillard-Bréholles in Paris, seit 1867.
Wilhelm Nitzsch in Königsberg, seit 1867.

Inhalt.

Berichtigung.

Pag. VI muss heissen *Ernst Dümmler*.

ABHANDLUNGEN

DER

PHYSICALISCHEN CLASSE

DER

KÖNIGLICHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN
ZU GÖTTINGEN.

DREIZEHNTER BAND.

Ueber den Vulkan von Santorin und die Eruption von 1866.

Von

Karl von Seebach.

Vorgetragen in der Sitzung der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften vom 2. Juni 1866.

Der nachstehende Aufsatz wurde veranlasst durch einen vierzehntägigen Aufenthalt auf Santorin während der gegenwärtigen Eruption im März und April 1866. Erst wenige Monate zuvor von einer grösseren Reise zur Erforschung der Vulkane Central-Amerikas zurückgekehrt, entschloss ich mich nur schwer noch vor der Ausarbeitung der gewonnenen Resultate einen neuen Ausflug anzutreten. Allein die Bedeutung der neuen Aufgabe und das Zureden von Freunden und Collegen trug schliesslich doch den Sieg über alle anderen Bedenken davon. Auf mein unterthäniges Gesuch geruhte Se. Majestät König Georg V. mich nach Santorin zu schicken und wies seine Regierung an mir aus der für wissenschaftliche Zwecke bereit gehaltenen Klosterkasse einen nicht unbeträchtlichen Zuschuss zu dieser Reise zu geben. War ich so auch nicht der erste auf dem Schauplatze des grossartigen Phaenomens, indem schon vom 11. bis zum 25. Februar und vom 1. bis zum 26. März eine griechische wissenschaftliche Commission unter der Führung des als Astronomen und Geologen gleich ausgezeichneten Herrn Dr. Julius Schmidt, derzeit Director der Sternwarte zu Athen, und vom 8. bis 23. März Herr de Verneuil und im Auftrage der Pariser Academie Herr Fouqué daselbst gearbeitet hatten, so blieb mir doch immer noch ein reiches Feld wissenschaftlicher Thätigkeit übrig. Da Herr Schmidt sich besonders der Beobachtung und Messung der eigentlichen Eruptionserscheinungen, Herr Fouqué aber dem chemischen Studium der entweichenden Gase

zugewandt hatten, so musste meine Aufgabe eine geognostische und petrographische Untersuchung des Vulkans sein. Die alte Caldera, die Kaymeni-Inseln und die noch im Entstehen begriffene Neubildung waren hierbei, so weit es die Kürze der Zeit und meine damals sehr angegriffene Gesundheit erlaubten, in gleicher Weise zu berücksichtigen.

Unmittelbar nach meiner Abreise von Santorin trafen die Herren K. v. Fritsch, W. Reiss und A. Stübel ein, die einen längeren Aufenthalt daselbst machten und die Kenntniss des Vulkans in jeder Beziehung zur Vollendung und zum Abschluss gebracht haben dürften. Mit den von ihnen in ihrem Werke „die Kaymeni-Inseln" schon publicirten allgemeinen Betrachtungen stimmen auch meine Schlussfolgerungen genau überein.

Da durch mancherlei Ursachen der Abschluss dieses Aufsatzes bis heute (November 1867) verzögert worden ist, so habe ich nicht nur die nach mir angestellten Beobachtungen der genannten drei Herren sondern auch alle übrigen bis jetzt erschienenen Untersuchungen über die gegenwärtige Eruption thunlichst berücksichtigt.

1) Zur allgemeinen Topographie.

Die unabweisbare Voraussetzung aller geologischen und besonders aller vulkanischen Untersuchungen ist das Vorhandensein genügender topographischer Karten. Da nun die bekannte Karte von Santorin in der Expédition scientifique de Morée und die, wie es scheint, wenigstens bisher in Deutschland weniger bekannt gewordene Seekarte der englischen Admiralität, die 1848 durch Cptn. Th. Graves und M. Mansell aufgenommen wurde, in den Küstenlinien und der ganzen Form von Santorin so bedeutende Verschiedenheiten zeigen, so musste eine Revision derselben dringend geboten erscheinen. An eine förmliche Neuaufnahme konnte natürlich ein einzelner in so beschränkter Zeit und bei so vielen anderweitigen Aufgaben nicht denken. Es musste daher am vortheilhaftesten erscheinen eine möglichst grosse Zahl wichtiger Positionen von neuem zu bestimmen und festzulegen, um durch sie einen Maasstab für die Beurtheilung des Werthes und der Genauigkeit der vorhandenen Karten zu

gewinnen. Zu diesem Zwecke wurde eine Reihe der wichtigsten Punkte in der Seefläche durch Winkelaufnahmen mit einem Bordaschen Spiegelkreise bestimmt und in den Inseln viele andere Positionen mittelst einer Schmalkalderschen Diopterboussole controllirt. Die Resultate dieser Messungen beweisen bei nur wenigen kleinen Abweichungen die grosse Genauigkeit und Sorgfalt der englischen Aufnahme, und da Herr J. Schmidt und die griechische Commission auch zu dieser Ueberzeugung gelangten, so dürfte durch die englische Admiralitäts-Aufnahme ein genügender Anhalt zur Beurtheilung späterer vulkanischer Umwandlungen in der horizontalen Gestaltung des Vulkans von Santorin gewonnen worden sein.

Es musste nun auch wünschenswerth erscheinen eine möglichst bedeutende Anzahl fester Punkte für die verticale Configuration des Vulkans zu bestimmen. Eine Reihe von mir zu diesem Ende mit einem vortrefflich zur Reise eingerichteten Fortin'schen Barometer [1]) angestellter Höhenmessungen bezweckten durch wiederholte Messungen einige wenige besonders interessante Höhen möglichst genau zu bestimmen. Dieselben verschwinden aber völlig gegen die grosse Anzahl der von H. J. Schmidt ausgeführten Höhenmessungen, die derselbe mit seltener Liberalität mir zur Verfügung stellte und die mit seiner Bewilligung hier veröffentlicht werden. Erst durch sie wird eine deutliche Vorstellung von den Reliefverhältnissen Santorins und die Möglichkeit für eine Erkennung ihrer säcularen Veränderungen gewonnen.

Es bedeuten in dem nachstehenden Verzeichnisse die Zahlen in der Rubrik B die Zahl der mit einem Quecksilberbarometer ausgeführten Messungen, die unter A dagegen die Anzahl der Aneroid-Ablesungen, wobei noch zu bemerken ist, dass das von Herrn J. Schmidt benutzte Aneroid besonders untersucht und corrigirt ist. Sämmtliche Messungen sind vollständig reducirt, und da auch meine Messungen der Kaymenis, für die Herr J. Schmidt sich besonders interessirte, von ihm selbst unter Anwendung genau construirter Curven der hypothetischen Lufttemperatur berechnet worden sind, so dürfte eine Angabe der Elemente der Messung

1) v. Lenoir in Wien.

unnöthig sein. Alle Höhen sind wie in Schmidt's Originalmittheilung in Toisen angegeben. Zur Controle sind auch die in Toisen umgerechneten Höhenangaben der Graves'schen Karte, deren Bestimmungsart mir aber leider unbekannt geblieben, mit angeführt worden. Die während meines Aufenthaltes noch zunehmenden Höhen der vulkanischen Neubildungen von 1866, der Georgspitze und der Aphroessa, sind wie weiter unten auch die in ihrer Nähe abnehmenden Meerestiefen aus dem Verzeichniss ausgeschlossen.

I. Auf der Insel Thera.

№	Bezeichnung der gemessenen Höhen.	Seehöhe in Toisen	B	A.	Beobachter.
1	Apanomerià (Haus Nomiskos).	67,0	—	2	Schmidt.
2	Eliaskirche.	114,6	—	1	„
3	Stavroskirche.	162,9	—	1	„
4	Megalo Vounò.	173,6	—	—	Graves.
4a	„ „	177,8	1	—	Seebach.
4b	„ „	165,3	—	x	Palaska[1].
5	Kokino Vounò.	159,0	2	—	Seebach.
6	Einsenkung (bei schwarzen Lapillen).	104,3	—	1	Schmidt.
7	Megalo Potamo (gr. Einschnitt am kl. Eliasberge).	120,2	—	1	„
8	Kl. Eliasberg, N.-gipfel.	171,9	—	1	„
8a	„ „	180,9			
9	Kl. Eliasberg, Kapelle.	165,1	1	—	Seebach.
10	Gr. Senkung N. v. Merovigli.	142,1	—	1	Schmidt.
11	Merovigli, Madonna di Malta.	185,7	2	2	„
11a	Merovigli.	182,6	—	—	Graves.
12	Kloster Hag. Nikolaos, N.-seite.	165,6	—	1	Schmidt.
13	Senkung zw. Merovigli u. Phira.	140,0	—	1	„
14	Windmühle in Ober-Phira.	148,7	1	1	„
14a	„ „ „ „	148,56	—	—	Graves.
15	Phira, Haus Sirigou.	145,4	2	2	Schmidt.

1) Identität unsicher, Zahl der Beobachtungen unbekannt.

№	Bezeichnung der gemessenen Höhen.	Seehöhe in Toisen	B	A.	Beobachter.
16	Phira, Eparcheion.	121,5	2	2	Schmidt.
17	Phira, Haus Decigala.	116,0	—	1	"
18	Phira, Hôtel du Volcan.	120,8	9	—	Seebach.
19	Phira, Panagia Belonia.	108,0	—	1	Schmidt.
20	Phira, Haus Lanzadas (Epitropeion).	102,7	10	13	"
21	Scala (die Rotunde, ca. die halbe Höhe).	51.0	8	11	"
22	Windmühle S. v. Phira.	114,7	1	2	"
23	II. Windmühle S. v. Phira.	117,6	—	1	"
24	Cap Alonaki.	121,9	1	1	"
25	Senkung, Südl. am Leprokomeion.	114,6	—	2	"
26	Gr. Cap (Tuff) über Athiniò.	155,3	2	3	"
27	Mühle über Athiniò.	137,1	1	3	"
28	Cap W. v. Hagia Marina.	135,2	—	1	"
29	Megalochori, Kirche Anargyria.	108,9	2	2	"
30	Megalochori, Metochion, unt. Zimmer.	121,1	1	1	"
31	Tiefste Einsenkung i. O. v. Akrotiri.	37,3	1	1	"
32	I. Mühle i. O. v. Akrotiri.	40,9	1	1	"
33	Akrotiri, Nordost-Seite, Haus.	49,2	2	2	"
34	Akrotiri, Mühle i. W.	84,4	—	1	"
35	Akrotiri, gr. Kuppe i. W.	107,2	1	1	"
35a	" " " " "	93,8	—	—	Graves.
36	Cap Akrotiri.	42,5	—	—	"
37	Echendra (Fuss d. Monumente).	1,8	1	—	Schmidt.
38	Emporeion, obere Häuser (Marko).	47,8	1	1	"
39	Platanimos-Berg.	70	geschätzt		"
40	Messa Vounò, Höhle i. S.	162,5	1	1	"
41	Messa Vounò, Gipfel.	191,3	1	1	"
42	Messa Vounò, Hag. Stephanos.	161,5	1	1	"
43	Messa Vounò, O. obere Quelle.	66,7	—	1	"
44	Sellada.	137,5	1	1	"
45	Gr. Eliasberg (Zimmer des Abts).	290,6	2	2	"
45a	" "	295,1	—	—	Graves.

№.	Bezeichnung der gemessenen Höhen.	Seehöhe in Toisen	B	A.	Beobachter.
46	Gr. Eliasberg, Schule i. N., tiefer.	172,4	1	1	Schmidt.
47	Sattel gegen Pyrgos.	147,6	1	1	„
48	Pyrgos Hag. Theodoria.	177,8	—	1	„
49	Pyrgos, Gipfel (höchste Terrasse d. Häuser).	191	1	1	„
50	Pyrgos, Fuss der Nördl. Häuser.	184,2	1	1	„
51	Mühlen W. v. Pyrgos.	162,5	1	1	„
52	Gonià, Christuskirche bei d. Mühlen.	118,8	1	1	„
53	Gonià, Hag. Charalampros.	99,9	1	1	„
54	Gonià, Hag. Panteleimon.	43,3	1	1	„
55	Messarà, Haus Tzanos.	60,7	—	1	„
56	Monolithos.	15,6	—	—	Graves.
57	Vorvouli.	86,1	—	1	Schmidt.
58	Cap Coloumbo.	28,1	1	—	Seebach.
59	Cap Coloumbo, Ruinen oben.	25	—	1	Schmidt.

II. Auf Therasia.

№.	Bezeichnung	Seehöhe	B	A.	Beobachter.
60	Hag. Dimitrios.	23,4	—	1	Schmidt.
61	Mühle Westlich in Manola.	88,8	—	1	„
62	Cap i. O. v. Vouli.	146,3	—	—	Graves.
63	Hag. Elias.	141,6	—	—	„
64	Panagia.	94,5	—	—	„

III. Auf der Aspro Nisi.

№.	Bezeichnung	Seehöhe	B	A.	Beobachter.
65	Gipfel.	36,2 (mit d. Spiegelk. 2 m.).			Palaska.

IV. Auf Palaea Kayméni.

№.	Bezeichnung	Seehöhe	B	A.	Beobachter.
66	Mitte des Plateau's.	32,5	1	1	Schmidt.
67	Gipfel (am Cap).	50,04	—	—	Graves.
67a	„ „ „	47,54	1	1	Schmidt.
67b	„ „ „	52,33	2	—	Seebach.

V. Auf der Mikra Kayméni.

68	Kratergipfel.	34,72	—	—	Graves.
68a	„	38,04	1	1	Schmidt.
68b	„	37,36	2	—	Seebach.
69	Kraterboden.	16,07	1	—	Seebach.

VI. Auf der Nea Kayméni.

70	Kraterkegelspitze.	54,89	—	—	Graves.
70a	„	53,93	4	7	Schmidt.
70b	„	54,41	—	5	Palaska.
70c	„	54,10	—	—	Nymphe [1].
70d	„	56,09	5	—	Seebach.

Diese Höhenmessungen, verbunden mit den zahlreichen Lothungen der Englischen Aufnahme, geben jetzt ein deutliches, bis in das Detail auf Messungen beruhendes Bild von den Reliefverhältnissen des Vulkans von Santorin und erweitern die von Lieutenant Leycester 1849 und von Sir Charles Lyell 1853 gegebenen Darstellungen desselben.

Ueber einer etwas elliptischen, von Nord nach Süd verlängerten, unterseeischen Basis von circa 12 Seemeilen (= 22 Kilom. oder 11000 Toisen abgerundet) Durchmesser erhebt sich mit einem mittleren Neigungswinkel von nur 4°, das alte Vulkangerüst zu einer mittleren Höhe von 236 T. (= 460 M.). In dieser Höhe bei einem grössten Durchmesser von 6 Seemeilen von Nord nach Süd und von 4 Seemeilen von Ost nach West ist der Kegel abgestutzt und umschliesst einen bis 244 T. (= 476 M.) tiefen Kessel, dessen Ränder anfänglich steiler, dann aber nur wenig geneigt sind. Diese grossartige Caldera ist also noch etwas tiefer in den Vulkan eingesenkt als seine mittlere Basis nach den vorhandenen Lothungen angesetzt werden muss. Die höchste Höhe erreicht der Kraterrand bei der Madonna di Malta zu Merovigli mit 385 T. (= 750 M.) über dem Calderatiefsten, die niedrigste Stelle des Kraterrandes scheint zwischen dem Mansel Riff und der Aspronisi zu liegen,

1) Durch die Officiere S. M. Corvette Nymphe gemessen, so viel mir bekannt mit Prismenkreis.

dort wo die Englische Karte 10 Faden Tiefe angiebt; hieraus berechnet sich eine Höhe von 190 T. (= 370,5 M.) über dem Calderatiefsten. In diesem Caldera-Rande ist nur nach Norden zwischen Apanomerià und Therasia eine tiefe Schlucht eingerissen, die schon Lyell mit dem Barranco de las Angustias auf Palma vergleicht und deren analoge Wiederholung an allen Calderen nach ihm ein characteristisches Merkmal derselben ist. Allein unähnlich den verglichenen, grossen Barrancos der atlantischen Inseln senkt sich die Sohle des grossen Thals, zwischen Thera und Therasia nicht von Innen nach Aussen, sondern von Aussen nach Innen. Die englische Seekarte, die uns für die submarinen Reliefverhältnisse Santorins ein so unschäzbares Material liefert, zeigt zwischen Apanomerià und Cap Riva auf Therasia 195 Faden Tiefe, weiter nördlich aber nur 136 und noch weiter nach Norden läuft der submarine Aussenabhang des Vulkans ununterbrochen von West nach Ost. Ungefähr 100 Toisen hoch über seiner mittleren Basis und etwa ebenso tief unter der Seefläche ist der Vulkan nirgends unterbrochen. Das Becken der Caldera liegt also circa 100 Toisen tiefer als die tiefste Einsenkung in ihrer Umfassung. Dieses merkwürdige Verhältniss, auf das wir bei der Frage nach der Entstehungsweise der Caldera von Santorin noch einmal werden zurückkommen müssen, deutet an, dass hier die Caldera den Barranco, und nicht der Barranco die Caldera veranlassten.

Ungefähr in der Mitte der von Nord nach Süd allmählich ansteigenden Caldera erheben sich die drei Kaymeni-Inseln und westlich von ihnen eine submarine Bank in ihrem unteren Theile als ein Kegel und erreichen in der Spitze der Nea Kaymeni eine Höhe von 219 Toisen (= 437 M.) über ihrer mittlere Basis (zu 175 Fathoms angenommen). Nur nach Osten, wo an die vier höheren Gipfel sich noch ein Flacher vierter Rücken anschliesst, der, 20 Fathoms unter der Seefläche, bis zu 74 T. (= 146,2 M.) unter dem Gipfel der Nea ansteigt, erhebt sich die gemeinsame Basis bis zu etwa 85 Fathoms unter der Seefläche oder bis zu 135 T. (= 236,3 M.) unter dem Gipfel der Nea und bildet so einen Uebergang zu dem östlichen Calderarande. Diese inneren Erhebungen stiegen bis 1866 als ein gemeinsamer Kegel bis zu 70 T. (= 136, 5 M.)

über die Basis auf und erst in dieser Höhe wurde die Palaea von den übrigen durch ein 149 T. (= 300,5 M.) tief unter dem Neagipfel gelegenes Thal getrennt. Zwischen der Nea und der Mikra ist das Thal bloss 62 T. (= 121 M.) tief und zwischen der Mikra und der sogenannten Lalande-Bank 108 T. (= 210 M.), immer unter dem Neagipfel gerechnet; hier ist also der innere Kegel bis über seine halbe Höhe ungetheilt. Von besonderem Interesse ist noch der Böschungwinkel dieses inneren Kegels. Derselbe berechnet sich im Mittel zu etwa 12° und übersteigt nirgends 35°, denn die steilen Klippen der Palaea müssen, als erst secundär durch Abwaschung erzeugt, bei einer Betrachtung der ursprünglichen Böschung ausgeschlossen werden. Eine Neigung von über 30° zeigen dagegen nicht nur die beiden Kegelspitzen der Nea und Mikra, sondern auch der submarine Abfall, westliche Abhang von der Palaea. Von allen diesen Reliefverhältnissen und speciell den Kaymeni-Inseln giebt die Arbeit von Fritsch, Reiss und Stübel und besonders die von Letzteren angefertigten prachtvollen Reliefmodelle ein vortreffliches Bild.

2) Die Caldera.

Die Caldera, der sogenannte Erhebungskrater von Santorin wird bekanntlich supramarin von den drei Inseln Santorin, Therasia und Aspronisi gebildet. Um Irrthümer und Weitläuftigkeiten zu vermeiden, ist es für geologische Zwecke passend, den Namen Santorin nur auf den Vulkan im Allgemeinen, auf die ganze Inselgruppe anzuwenden, die einzelne Insel Santorin aber mit dem althellenischen Namen Thera zu bezeichnen.

Von diesen drei supramarinen Theilen der Caldera habe ich Therasia und Aspronisi nicht besucht, Thera aber ist wenigstens in seinem mittleren Theile mehrfach von mir durchforscht worden.

Vor Allem auffällig und für das geübte Auge schon aus der Ferne von der vulkanischen Umgebung sich sondernd, ragt im Süd-Osten der Insel Thera der grosse Eliasberg auf. Er ist 290,6 T. (= 566,6 M.) hoch und daher 104,9 T. (= 204,5 M.) höher als die höchste Höhe des Kraterrandes bei Merovigli. Derselbe besteht, wie schon Pitton de Tournefort im Jahre 1718 bemerkt, wesentlich aus ziemlich feinkör-

nigem krystallinischen Kalk von vorherrschend graublauer Farbe. Herr Virlet hat darauf 1833 (Exped. sc. d. Morée, Bd. II, Abth. 2, S. 74 auch auf den mit dem Marmor vorkommenden Thonschiefer (Phyllit) aufmerksam gemacht; und aus dieser Vergesellschaftung, sowie aus dem gemeinsamen Nordwest—Südöstlichen Streichen die enge Zusammengehörigkeit mit den übrigen nicht vulkanischen Cycladen dargethan. In der That sind der graublaue körnige Kalk, und der bald mehr bald minder glimmerreiche Phyllit ununterscheidbar von manchen Gesteinen der übrigen Cycladen und finden ihre nahen Verwandten selbst noch im östlichen Attika. Der grosse Eliasberg auf Thera ist zweifellos, nur die südlichste Kuppe des grossen Kalkglimmerschiefergebirges, aus welchem fast das ganze östliche Griechenland bis hinauf zum Pentelikon sich aufbaut. L. v. Buch (Poggend. Ann. 1827, Bd. X, S. 173), glaubte dasselbe sei hier durch die vulkanischen Massen mit gehoben worden, allein das ist nicht der Fall. Der grosse Geognost, der nie selbst Santorin besucht hatte, ist hier offenbar irregeleitet worden durch eine Stelle bei Tournefort (Rélation dun voyage du Lévant lib. I, p. 104), wo er sagt: Le 7. Oct. nous allâmes sur la montagne de St. Etienne.... Il est bien estraordinaire de voir un bloc de marbre, enté, pour ainsi dire, sur des pierres ponces etc. Allein das Kalkglimmerschiefergebirge ist in Wahrheit wie Herr Virlet und, wenn auch mit einigen phantastischen Zuthaten, Fiedler (Reise durch Griechenland 1841, Bd. II, S. 486) ganz richtig erkannten, das älteste Stück von Thera auf dem die vulkanischen Producte überall auflagern. Das ist sehr schön und deutlich am Nordabhange des Eliasberges und südlich von Gonià zu beobachten. Auch die Art und Weise, wie das Kalkglimmerschiefergebirge an anderen Punkten auftritt, beweisst dies. Schon Virlet wusste, dass der Kalk noch einmal weiter Nördlich in dem sogenannten Monolith des heiligen Johannes bei Messaria aus der vulkanischen Decke hervortritt und L. Ross hat das Verdienst schon 1837 (publicirt erst 1841 in der Inselreise I. Bd., S. 185) die interessante, jetzt ausreichend bestätigte Entdeckung gemacht zu haben, dass die krystallinischen Schiefer und Kalke auch in den steilen Abhängen des Calderarandes nicht fehlen. Dieselben treten

noch einmal in dem Abhange bei der kleinen Therme südlich des Athinioshafens auf, ohne jedoch die tuffbedeckte Höhe des Kraterrandes zu erreichen.

Aus alle dem ergiebt sich, dass sich südwestlich von der vulkanischen Esse das Schiefergebirge zu einem Bergzuge erhebt, dessen Abhänge von den ausgeworfenen vulkanischen Producten überschüttet und zwar natürlich zunächst der Esse am höchsten überkleidet und bedeckt wurden. Ein weiterer Zusammenhang zwischen dem Kalkglimmerschiefergebirge und den vulkanischen Bildungen besteht nicht.

Der übrige Theil von Thera, ganz Therasia und Aspronisi bestehen aus vulkanischen Schichten, die mantelförmig von Innen nach Aussen abfallen. Der allgemeine Eindruck derselben, das Vorherrschen der losen Massen, die eingeschobenen sich manchfach auskeilenden Lavabänke und die oberste mächtige Schicht, weissen Andesittuffs, die in ganz gleicher Weise alle drei Inseln überzieht und so deren ursprüngliche Zusammengehörigkeit beweist, ist mehrfach beschrieben worden. Besonders treffend von M. Virlet (Exped. sc. de Morée sciences phys. T. II partie II, S. 260). Hervorzuheben ist nur noch die Abwesenheit von Lavagängen, die an der Somma und im val del Bove so häufig sind. Von Herrn Fouqué und den Herrn Reiss, Stübel und v. Fritsch sind zwar mehrere derselben nördlich vom Palaeo Skaro und unterhalb des kleinen Eliasbergs beobachtet worden. Allein sie sind eine Ausnahme und lassen ihr sonstiges Fehlen nur um so mehr hervortreten. Das Vorkommen von Gängen gerade an dieser Stelle, an der allein in grosser Zahl, wenn auch meist wenig mächtige Lavabänke bei einem Zurücktreten der Tuffe zu beobachten sind, nimmt ein specielles Interesse in Anspruch. In seiner Nähe am kleinen Eliasberge sind die nach Aussen abfallenden Lavabänke stärker geneigt als sonst, hier fehlt die Decke von weissem Andesittuff und in der Nähe liegt der einzige mir bekannt gewordene Hügel den man allenfalls als einen seitlichen Eruptionskegel deuten könnte, der Kokino-Vaunò, der rothe Berg auf den wir später zurückkommen werden. Zieht man endlich eine Gerade von der Columbobank über das Centrum der Caldera von Santorin nach den eben-

falls vulkanischen Christiani-Inseln, so liegen jene Gänge in der unmittelbaren Nähe derselben.

Wie schon L. v. Buch ganz richtig erkannte, bilden die vulkanischen Bildungen Griechenlands eine Nordwest-Südöstliche Vulkanreihe, deren Südöstlichstes Glied eben Santorin ist. Allein in dieser Vulkanreihe wiederholt sich eine Erscheinung, die in Java, Süd-Amerika und Central-Amerika wiederkehrt und in Wahrheit allen Vulkanreihen eigenthümlich zu sein scheint, nämlich eine Querreihung der nahe an einander gelegenen vulkanischen Centrem. Diese Querreihung war es auch, die Herrn Virlet irrte (Bullet d. l. soc. géol. d. France 1832—33, f. III. p. 169) und ihn bestimmte dies Vorhandensein einer Nordwest-Südöstlichen Vulkanreihe in Griechenland zu läugnen. Mit Unrecht. Die Nordwestlichste Querreihe bilden Methana und Aegina, dann folgt Poros; Milo, Kimolo, und Polino machen die mittlere Querreihe aus, und nach dem einzelnen Polikandro stellen Christiani Santorin und die Columbobank die letzte Querreihe dar. Die Vulkane Griechenlands sind daher nicht unregelmässig zerstreut wie M. Virlet will, sondern sie sind vielmehr fast zu regelvoll und gesetzmässig geordnet. Dieselben Ursachen, welche in der grossen Nordwest-Südöstlichen Hauptreihe diese Querreihung bewirkten, haben ausser der Richtung der Kaymeni-Inseln auch das Auftreten von Lavagängen am kleinen Eliasberge bedingt. Es ist wahrscheinlich, dass auf dieser Linie und zeitweilig in der Nähe dieser der Hauptschornstein der vulkanischen Thätigkeit sich befunden hat.

Die petrographische Beschaffenheit der den Calderarand bildenden Gesteine kann man am bequemsten an dem Dromo, der steilen Serpentine, die vom Hafen nach der Stadt Phira hinaufführt, studiren. Es ist derselbe Durchschnitt, den Herr Virlet beschreibt und abbildet (a. a. O. S. 260 u. Atlas Taf. IV, Fig. 4) und dessen Schichtenreihe auch Fiedler (Reise Bd. II, S. 490) angiebt. Die Abbildung von Herrn Virlet stimmt, wenigstens jetzt, nicht mehr recht mit der Natur und es ist mir unmöglich gewesen seine Darstellung mit einer Skizze, die ich selbst aufgenommen, in Uebereinstimmung zu bringen. Dagegen giebt dieselbe gut den allgemeinen Character des Kraterrandes wieder und zeigt treff-

lich, dass man es hier nirgends mit continuirlichen Schichten zu thun hat. Auch meine Aufzeichnungen über die einzelnen Schichten längs des Dromo weicht ein Wenig von den Angaben bei Virlet und Fiedler ab, indem diese, wie ich glauben möchte auf Kosten des wirklich characteristischen und wesentlichen, weit mehr Einzelnheiten unterscheiden. Doch ist eine Parallelisirung unserer drei Profil nicht schwer. Ich fand nämlich von Unten nach Oben:

A. Circa 150′ Tuff. Zu unterst rosa-roth, ziemlich dicht und gleichartig, nach Oben grau werdend mit einzelnen grösseren Brocken und Blöcken einer schwarzen Lava. Es ist dies die Schicht Nr. 2 bei Fiedler und S. 261 erster und zweiter Absatz bei Virlet.

Eine Untersuchung der einzelnen Blöcke in diesem Tuffe ist von Interesse und zeigt uns gleich in diesen ältesten unserer Beobachtung zugänglichen Producten den nämlichen Gesteinstypus, der in grosser Gleichartigkeit überall in Santorin wiederkehrt. Die Lava derselben besitzt eine dunkelbraune bis tiefschwarze oft an Pechstein erinnernde halbverglaste Grundmasse, in der bald mehr bald weniger zahlreiche glasige Feldspathkrystalle ausgeschieden sind. Sie lenkt den Magneten ziemlich stark ab. Besonders thun dies einige dichte und porphyrische Varietäten. Manche Stücke sind porös und zellig „mit Anlage zur Parallelstructur“ andere dicht. Die Zellräume sind bald nur durch mikroskopische Stalactiten der Grundmasse begrenzt, bald mit einzelnen Feldspathkrystallen bekleidet und erfüllt. Dieselben sind alsdann tafelförmig und sehen eigenthümlich zusammengesintert aus, die Flächen sind zugerundet und nicht mehr messbar. Dagegen kann man sich nicht selten an den porphyrisch eingesprengten Krystallen durch die deutlich hervortretende Zwillingsstreifung überzeugen, dass derselbe triklin ist. Die Spaltungsflächen sind wasserhell, mit Neigung zu Newtonschen Farrbenringen und von der bekannten rissigen Beschaffenheit, die in allen Andesiten so häufig wiederkehrt. Neben dem triklinen Feldspath sieht man noch kleine dunkelere Ausscheidungen von grünlicher Färbung. Sie sind bald dunkellauchgrün von kurzsplittrigem Bruche und geringem Glanze, bald lichter gefärbt, olivengrün und fast diamantglänzend mit Neigung

zum metallischen Perlmutterglanze. Jene, die zuweilen noch den characteristischen Querschnitt zeigen, sind Augite, von der nämlichen Varietät, wie sie so häufig in den Vesuv-Laven vorkommen; diese, die nur als Körner vorzukommen scheinen, sind Olivin, der in halbverglasten Andesitgesteinen, soweit meine Erfahrung reicht, stets jenen hohen Glanz und die metallisch schimmernden Farben besitzt. Die Quantität, in der diese drei Mineralien ausgeschieden sind, ist sehr wechselnd und scheint in nahem Verhältnisse zur Structur der Gesteine zu stehen, indem die nicht porösen Varietäten desselben am reichsten sind. Auch die verhältnissmässige Menge derselben unter einander ist variabel, stets herrscht jedoch der trikline Feldspath stark über die andern zwei vor. Der Olivin ist oft eng verwachsen mit dem Augit, ähnlich wie in den bekannten Olivinbomben und nicht selten kann man ihn und auch den Augit, zum deutlichen Beweiss ihrer früheren Erstarrung, in den Feldspath-Kryställchen beobachten, die sich oft gerade um jene herum auskrystallisirt zu haben scheinen.

Zahlreich finden sich noch kleine Magneteisenkrystalle und in einzelnen Drusen kann man feine schmutzig erbsgelbe Krystallnädelchen erkennen, die unter dem Mikroskope als vierseitige rectanguläre Prismen mit einem Doma zu erkennen sind. Von den beiden Domaflächen ist die eine in der Regel grösser als die andere, wodurch die Kriställchen dann monoklin und ganz ähnlich denen erscheinen, die Zirkel aus den neugebildeten Laven der letzten Eruption beschreibt und (Jahrb. 1866, Taf. 8, Fig. 3) abbildet. Da jedoch oft eine senkrecht auf der Hauptaxe stehende Spaltbarkeit zu beobachten war, so kann das Mineral nicht monoklin sein. Dasselbe erscheint unter dem Mikroscop olivengrün, stark durchscheinend mit zahlreichen Blasenräumen im Innern. In Salzsäure ist es schwer oder unlöslich. Eine genauere Bestimmung der Species war leider bei der ausserordentlichen Kleinheit der Krystallchen unmöglich.

Nach dem angegebenen Fundort und der petrographischen Beschreibung scheint die von K. v. Hauer analysirte Probe Nr. III auf Seite 79 der Verhandlungen der K. K. geologischen Reichsanstalt, Jahrg. 1866

ebenfalls das Stück eines Lavablocks aus dem in Rede stehenden Tuff gewesen zu sein. Diese Vermuthung ist um so zulässiger und unbedenklicher als fast alle vorliegenden Analysen von Santoringesteinen so gut übereinstimmen. Danach haben wir es mit einem sehr sauren Gestein zu thun und werden daher auch auf einen möglichst sauren Feldspath schliessen müssen. Stache (a. a. O. S. 67) hält die Santoringesteine (zunächst die neu gebildeten) für Sanidin-Oligoklas-Trachyt und dieser Ansicht schliesst sich auch K. v. Hauer (a. a. O. S. 190) in Folge von Zirkels Uuntersuchungen (Jahrb. f. Mineralogie 1866 S. 769 u. ff.) an, nachdem er dieselben zuerst für quarzhaltige Augit-Andesite gehalten hatte (Jahrb. d. k. k. geol. Reichsanst., Verhandl. S. 80). Bei dem auch nach Zirkel „auffallenden Vorherrschen des Natron über das Kali", bei den stets zahlreichen von mir beobachteten triklinen Feldspäthen, neben denen man keinen Grund findet, noch eine zweite Feldspathart anzunehmen, ferner bei einem Kieselsäuregehalt, der zum Theil selbst die Säurungsstufe des Orthoklas noch übersteigt, und endlich bei dem öfter wohl erkennbaren Augit muss ich indessen, wie später noch weiter begründet werden wird, bei dieser letzten Ansicht stehen bleiben und halte das herrschende Santoringestein für quarzführenden Augit-Andesit.

B. 15' mächtig, eine Felsbank eines schwarzen Asphalt-ähnlichen Gesteins mit vielen meist licht-ziegelrothen Einschlüssen. Es ist dies die Schicht Nr. 3 bei Fiedler. Bei Virlet scheint die „coulée d'une lave noire, c'est un Porphyre trachytique smalloïde et un peu scoriacée mélangé de fragmens d'autres Trachytes" das in Rede stehende Gestein bezeichnen zu sollen. Dasselbe ist sehr eigenthümlich, pechschwarz, bald matt und erdig, bald von kurzsplitterigem bis muscheligem Bruche und dann pech- bis glasglänzend. Stets opak und nur in mikroskopischen Splittern bräunlich durchscheinend bis durchsichtig. Beide, das matte und das glänzende, Vorkommen sind innig durcheinander gemischt und lassen nur im Grossen mehr matte oder mehr dichte Schichten und Streifen erkennen. Das Ganze erinnert ausserordentlich an gewisse Schlacken, die auf der Grenze des Glasigen zum Steinigen stehen, an manche Asphalt-Vorkommen und an Palagonittuffe; die dichten Partien auch

wohl an Tachylit und Pechstein, doch ist der Glanz weniger fettartig wie beim letzteren. Diese Grundmasse zeigt einen geringen Wassergehalt und gab 2,57% Glühverlust. Härte 6—7. Grössere Gesteinsbrocken von meist lichtgrauer oder lichtröthlicher Färbung und zahlreiche kleinere krystallinische Individuen sind in diese Masse eingebettet. Ausser einem triklinen Feldspath, der vorherrscht, kann man wiederum lauchgrünen Augit, hellolivengrünen Olivin und kleine Magneteisenkryställchen erkennen. Die grösseren Gesteinsbrocken sind bald mehr bimsteinartig, bald mehr tuffartig, bald offenbar gefrittete steinige Andesitstückchen. In einigen dieser letzteren konnte noch deutlich ein trikliner Feldspath erkannt werden. Im Grossen zeigt diese Felsbank eine in sich sehr regelmässig geschichtete Structur.

Diese eigenthümliche Gebirgsart kenne ich ausserdem nur noch in der Nähe des Vulkans Rincon de la Vieja, wo ich sie in ganz ähnlichem Vorkommen an den Ufern der Südsee in der Bahia de las Culebras beobachtete, und als schwarze Flammenstreifen in dem Piperno-artigen „Cascajo" von las Pavas auf dem Plateau von Costa-rica.

C. 300′ mächtige röthlichgraue Tuffschichten. Sie entsprechen den Schichten Nr. 4—12 bei Fiedler und 1—27 bei Virlet (S. 262 und 63). Diese Tuffschichten umschliessen nach Unten grosse, oft über einen Fuss im Durchmesser haltende Andesitblöcke, deren Mehrzahl petrographisch durchaus mit denen in dem unteren Tuff übereinstimmt. Nach Oben wird derselbe von ziemlich gleich grossen, kleinen Lapillen gebildet. Virlet erwähnt eine einen Fuss mächtige Schicht mit Pisolithen. Ich glaube kleinere und wenig deutliche Pisolithe in mehreren Schichten gesehen zu haben, aber nie ist mir auf Santorin jene an Regelmässigkeit fast den Carlsbader Erbsenstein übertreffende Pisolith-Bildung des Tuffs vorgekommen, wie sie wohl an anderen Orten beobachtet worden ist und wie ich sie selbst in Nicaragua am Fusse des Vulkans von Masaya-Nindirí und in Guatemala am Nordufer des herrlichen Alpensees von Panajachel gegenüber dem Vulkane Atitlan gesehen habe. In ausgezeichneter Weise zeigt der Tuff jedoch in seinen oberen Schichten transversale Schichtung (Cross stratification).

D. In diesem Tuffe liegen zwei feste Bänke einer steinigen Lava, von denen die eine an der südlichsten Spitze der ganzen Serpentine zu beobachten ist und Nr. 27 bei Virlet (S. 263) entspricht. Wahrscheinlich soll Fiedlers Nr. 12 dieselbe Schicht sein. Es ist dieser Lavastrom etwa 15′ mächtig und man sieht von ihm an der Serpentine nur sein nördliches Ende, umgeben von einer Schlackenkruste, die nach Oben und Unten etwa 4′ mächtig, seitlich jedoch bis 15′ breit ist. Das Gestein ist ein dunkelbrauner Andesit, den schon Virlet gut beschrieben hat.

E. 4′ dunkelgrauer Tuff mit Lapillen, gleich Nr. 28 bei Virlet, trennt den Lavastrom D von einem zweiten, der an der nächst höheren, nördlichen Wendung der Serpentine eintritt und von dem umgekehrt das südliche Ende sich bis hierhin fortgeschoben hat.

F. Diese Andesitlava ist circa 20′ mächtig und von Virlet unter Nr. 29 ebenfalls schon characterisirt worden.

G. 20′ dunkeler Tuff mit Lapillen folgen darüber und trennen jene Lava von der Hauptfelsbank im ganzen Abhang.

H. Dieser circa 60′ mächtige Lavastrom springt aus dem lockeren Tuff heraus und fällt schon von Weitem auf. Nr. 30 und 31 bei Virlet bezeichnen diese gewaltige Ablagerung, die auch auf seiner Profilzeichnung Taf. XI, Fig. 4 unter Nr. 2 deutlich wiederzuerkennen ist. Es zeigt diese Schicht einen wechselnden petrographischen Habitus, der sich indess auf einen porösen und auf einen dichten Typus zurückführen lässt.

Die poröse Abart hat eine dunkelaschgraue bis schwarze, steinige bis halbglasige Grundmasse mit zahlreichen pfirsichblüthroth ausgekleideten Poren und Zellen von wechselnder Gestalt, bald unregelmässig begrenzt, wobei die steinige Grundmasse besonders hervortritt, bald rechtwinkelig auf die Richtung des Lavastroms flachgedrückt, in welchem Falle, von Oben und Unten gesehen, die pfirsichblüthrothe Auskleidung der Drusenräume vorherrscht, während von der Seite das Gestein fein schwarz und rosa gestreift erscheint. Dabei kommen jedoch natürlich keine zusammenhängenden röthlichen Farbenbänder vor. Von ausgeschie-

denen Mineralien, die bald in grösserer bald in geringerer Menge sich vorfinden, fällt vor allen ein glasiger Feldspath auf, der auch hier wieder deutlich als gestreift erkannt werden konnte. Dann entdeckt man bei einer genaueren Betrachtung einzelne lauchgrüne Krystallsäulen, die ich für Augit halte, und kleine stark glänzende Magneteisenkörner. Endlich scheinen einzelne kleine braungrüne oder, wohl nur in Folge des Hintergrundes der schwarzen Grundmasse, schwarze Körner Olivin zu sein. Untersucht man die stalaktitische Auskleidung der einzelnen Zellräume mit der Loupe, so gewahrt man zahlreiche kleine Körnchen von rundlicher Gestalt und milchweisser Farbe, die man zunächst für Sodalith halten könnte. Bei einer vierzigfachen Vergrösserung überzeugt man sich aber leicht, dass man es nicht etwa mit einfachen Krystallen des regulären Systems zu thun hat, sondern mit zahlreichen Krystallen, die sich mannigfach durchwachsen haben und deren genauere Form leider nicht zu ermitteln war. Nur einige Male glaubte ich Feldspathviellinge zu erkennen. Das würde auf zwei trikline Feldspathe deuten. Doch ist mir die Beobachtung selbst noch unsicher. Vielleicht waren es kleine Krystalle der Auskleidungsrinde, die aus Versehen mit losgelöst waren. Denn bei der gleichen Vergrösserung erkennt man, dass die ganze pfirsichblüthrothe Auskleidung der Zellen ebenfalls von sehr feinen Krystallen gebildet wird, die auch ein trikliner Feldspath und wohl sicher identisch mit den grösseren ausgeschiedenen Krystallen sind.

Die dichte Varietät dieser mächtigen Lavabank ist von aschgraner Farbe mit einem Stich ins Violette. Sie ist steinig, dicht, von grauer Farbe und enthält ausgeschiedene Magneteisenkörner, Augitsäulen, sowie am häufigsten und oftmals mit dem Augit verwachsen triklinen Feldspath. Sie zeigt eine plattige, ja fast schiefrige Absonderung, deren Schichtflächen hell rothgrau sind, ähnlich der Auskleidungsrinde der porösen Varietät. Virlet und Fiedler vergleichen dies Gestein sehr mit Recht mit einer übereinstimmenden Varietät, die auf der Palaea Kaymeni sich findet. Eine etwas geringere, wenn auch immer noch auffällige, Aehnlichkeit zeigt das in Rede stehende Gestein mit den plattenförmig abgesonderten „thonsteinartigen“ Lipariten im Krater von Vul-

cano, an denen man allerdings zuweilen eine dem Santoringestein fehlende Neigung zur perlitischen Structur erkennen kann. Diese Aehnlichkeit wird noch dadurch erhöht, dass wie in dem Liparit schon Abich (Vulk. Erschein. 1841, S. 27) erwähnte, so auch in diesem Santoringestein in feinen spaltenartigen Drusenräumen, welche den Absonderungsflächen parallel laufen, zahlreiche feine Quarzkryställchen sich finden. Der Quarz ist wasserhell in langen sechsseitigen Säulen mit der characteristischen Querstreifung der Flächen und der Pyramide am einen Ende. Einmal wurde bei 60 maliger Vergrösserung auch eine sogenannte Rhombenfläche erkannt. Neben dem sehr vorherrschenden Quarz treten scharf ausgebildete, kurze, schwarze Krystalle auf, die durchaus an die kleinen Hornblendeprismen des Liparits erinnern. Leider sind dieselben zu klein, um gemessen werden zu können; bei einer mikroskopischen Prüfung erkennt man jedoch in ausgezeichneter Weise die Krystallform der Hornblende, das sogenannte zwei- und eingliedrige Dodekaid mit dem regulär sechseckig erscheinenden Querschnitt. Untergeordnet finden sich dann noch kleinere weingelbe bis nelkenbraune, wie es scheint, monokline Kryställchen, die ich für Titanit halte. Nur sehr sparsam kommt in diesen Drusen auch das schon oben erwähnte rhombische Mineral vor. Derlei kleine Drusenräume sind jedoch nur sehr seltene Ausnahmen; in der Regel liegen die Absonderungsflächen zweier benachbarter Plättchen fest auf einander gewachsen und lösen sich erst durch gewaltsame Spaltung. Sie sind bald rauh, bald in eigenthümlicher Weise geglättet, als ob die Masse eine Gleitung in sich durchgemacht hätte. Die rauhen Theile offenbaren sich bei 100 maliger Vergrösserung deutlich als ein Haufwerk sehr kleiner trikliner Feldspathviellinge und auf den glätteren Flächen finden sich ebenfalls viele, etwas grössere glasige Feldspäthe, deren Zwillingsstreifung, obgleich immer noch sehr fein, bei starker Vergrösserung doch fast überall wahrzunehmen ist. Ausserdem sind noch vorhanden sehr zahlreiche, kleine, pechschwarze krystallinische Körner, die bei 60—100 maliger Vergrösserung als scharf begränzte flächenreiche Krystalle sich ausweisen. Ihre Deutung ist schwierig, doch dürften es zweifellos Augite sein. Bei der äusseren Aehnlichkeit mit dem Kratergestein

von Vulkano erwähne ich ausdrücklich, dass ein irgend beträchtlicher Glühverlust oder gar ein Gehalt von Schwefel oder Schwefelsäure hier kaum erwartet, jedenfalls aber nicht nachgewiesen werden konnten.

I. Ueber dieser mächtigen Lavabank folgt die bekannte über den grössten Theil der Calderaränder verbreitete Decke von weissem Andesittuff, die hier 120' mächtig ist. Sie wird bald von sehr fein zerriebenen Theilen gebildet und giebt dann die trassähnliche Santorinerde, bald ist es ein förmliches Conglomerat von rundlichen Bimsteinbrocken bis zu Faustgrösse, wie bei Messarià und am Megalo-vounò. Der Bimstein ist ziemlich dicht, weiss bis hell fleischfarben; viele glasige Feldspäthe, sowie neben und oft mit ihnen verwachsen lauchgrüne Augitkryställchen sind bald in der Grundmasse, bald in den schaumigen Kohlräumen ausgeschieden. Der Feldspath zeigt unter dem Mikroskop eine sehr feine polyedrische Zerberstung, die bei durchfallendem Licht oft an parenchymatische Pflanzengewebe erinnert. Wenn man indessen die kleinen Polyeder genau untersucht und hinreichend vergrössert, kann man immer noch die zarte Zwillingsstreifung erkennen. Nicht selten finden sich auch, meist auf den Augiten aufgewachsen, äusserst kleine Magneteisenkörner. Wie also für die chemische Gesammtbeschaffenheit schon Abichs Analyse (Vulk. Erschein. 1841, Tabelle III, Nr. 9 und S. 64, Zeile 2 v. Unten, cf. auch Roth Gesteinsanalysen S. 11, Nr. 17) zeigte, so erweisen jetzt auch die ausgeschiedenen Mineralien den Bimstein der „*ἀσπρόχωμα*“ Santorins und diese selbst als die schaumige und zu Mehl zermahlene Ausbildungsweise eines (freie Kieselsäure enthaltenden) Augit-Andesits. Von dem schwarzen halbglasigen Andesit liegen ebenfalls einzelne, meist grössere Blöcke in dem weissen Tuff. An den aus ihnen errichteten Mauern der Weinberge kann man überall in kürzester Frist eine Musterkarte aller seiner, nur wenig verschiedenen Varietäten sammeln.

Die weisse Andesittuffdecke fehlt in dem vulkanischen Theil der Caldera, wie schon Herr Virlet (a. a. O. Pag. 264) erwähnt, bloss auf dem kleinen St. Eliasberg und auf der von mir leider nicht besuchten Südspitze der Insel. Herr Virlet ist in Folge dessen geneigt (S. 265), den

kleinen St. Eliasberg für ein besonderes Eruptionscentrum zu halten. Schon weiter oben wurde aus dem, mir wenigstens, allein von hier bekannt gewordenen Auftreten von Lavagängen und dem steileren Abfallen der Lavabänke, sowie der Lage des kleinen Eliasberges auf der vulkanischen Querreihe geschlossen, dass in der Nähe desselben einst der Krater des Vulkans von Santorin gelegen haben möge. Für die Ansicht aber, dass hier eine besondere vulkanische Oeffnung, also doch wohl ein Seitenkrater gelegen, habe ich auch nicht einen Anhaltspunkt zu finden vermocht. Der Berg hat nicht die characteristische Kegelform, sondern ist ein gestreckter Rücken, dessen Grat von fast geradlinig streichenden, nur nach Ost-Nordost abfallenden Tuff- und Lavaschichten gebildet wird.

Dagegen habe ich bei meinem Besuche dieses Theils der Insel anfänglich in dem Kokino-vounò, dem rothen Berge, einen solchen Nebenkrater vermuthet. Besonders täuschend ist die Erscheinung desselben von Südost aus. Regelmässig konisch erhebt er sich ausserhalb des Calderarandes und ist auf seiner Anhöhe mit ausgezeichnet rothen Lapillen bedeckt, die ihm seinen Namen eingetragen haben. Allein bei einer Besteigung desselben und Untersuchung von der Westseite aus überzeugt man sich, dass auch er kein parasitischer Seitenkegel ist. Denn wenn auch von hier der Kokino-vounò, durch einen Sattel vom Calderarande getrennt, flach kegelförmig sich erhebt und auf seiner Höhe eine kleine Ebene ist, die man wohl als den Ueberrest eines denudirten Kraters deuten könnte, so war es mir doch nicht möglich, wie eine solche Annahme verlangen würde, auch gegen Süden und Westen abfallende Schichten zu entdecken; alle fallen gleichartig nach Nordosten. Unter den verdächtig rothen Lapillen, die den Hügel selbst bilden, folgt erst ein weisser Andesit-Tuff mit Bimsteinen und darunter grauer wohlgeschichteter Tuff mit Lapillen, beide fallen nur vom Centrum der Caldera aus ab. Da man nun eine ähnliche rothe Lavabank in nahezu gleichem Horizont, wenn auch bei sonst abweichender Schichtenfolge ganz in der Nähe am kleinen St. Elias und bis zum Paläoskaro beobachtet, so wird man wohl am einfachsten die rothen Lapillen des Kokino-vounò durch Verwitterung und Zerfall jener Schicht und den flachen

Sattel zwischen ihm und dem Megalo-vounò durch Denudation erklären.

Ist der Kokino-vounò aber kein parasitischer Seitenkegel, so könnten dergleichen nur noch südlich oder südwestlich von Acrotiri erwartet werden. Die ganze übrige Caldera ist frei von ihnen. Ueber jene Gegend habe ich aber leider kein Urtheil, da ich das einzige Mal, dass ich an ihr vorüber kam, von der Dunkelheit der Nacht überrascht wurde. Wenn daher seitliche Eruptionen auf Santorin — wie auch die Gänge unter dem kleinen Eliasberge andeuten — nicht gänzlich gefehlt haben mögen, so sind doch jedenfalls sie selbst viel zu selten gewesen und ihre Producte viel zu untergeordnet und unbedeutend, um eine wesentliche Eigenthümlichkeit im Baue des Vulkans von Santorin ausmachen zu können. Eine Vergleichung mit zwei allerdings gerade an seitlichen Durchbrüchen besonders reichen Vulkanen, mit dem Aetna und — nach der eben erschienenen Karte von K. v. Fritsch, E. Hartung und W. Reiss — mit Tenerife lässt das deutlich erkennen.

Die Columbobank wird durch ihre Lage auf der vulkanischen Querreihe und durch den abweichenden Eruptionstypus, trotz ihrer geringen Entfernung von Santorin, als selbständiger Vulkan genügend gekennzeichnet.

An dem Megalo-vounò beobachtet man unter dem am Kokino-vounò erwähnten grauen Tuff mit Lapillen eine circa 6′ mächtige Gesteinsbank, die wohl der Erwähnung werth ist. Auf den ersten Blick glaubt man unzählige Feldspathfragmente, durch einen lichtrothbraunen Tuff cementirt, vor sich zu haben. Aber bei einiger Aufmerksamkeit bemerkt man, dass der Feldspath in Krystallen sich vorfindet. Es sind trikline Viellinge mit ein- und ausspringenden Winkeln und deutlicher Streifung auf dem Blätterbruche. Neben ihnen konnte ich nur noch kleine Magneteisen- und Augitkryställchen unterscheiden. Die Grundmasse ist ein lockeres Aggregat (unvollständiger?) Feldspathkryställchen, welche dem ganzen Gestein eine eigenthümlich aufgelockerte und sandig anzufühlende Beschaffenheit verleiht. Mürbe und doch spröde und klingend, saugt es mit leisem Brausen begierig Wasser auf. Es erinnert in der ganzen Structur an einige Domite. Dunkele meist schwarzbraune unter sich

parallele Flammen und Streifen geben jedoch bei ebenfalls übereinstimmender Structur eine noch weit grössere Aehnlichkeit mit dem Piperno der phlegräischen Felder. In der That dürfte das in Rede stehende Gestein, wenn man die Annahme gestattet, dass auch hier wieder der trikline Feldspath Oligoklas sei, in der Augit-Andesitreihe dem Piperno der Sanidin-Trachytreihe entsprechen. Ein von ihm ununterscheidbarer Andesit-Piperno findet sich auch am südlichen Abhange der Lagõa do Fogo auf São Miguel [1], und analoge, ebenfalls der Andesitreihe angehörige Piperno habe ich in Gemeinschaft mit meinem Freunde A. v. Franztius bei S. José de Costa-Rica gesammelt. Diese weitere Verbreitung dürfte die Ansicht unterstützen, dass der Piperno, wie Obsidian und Bimstein, nur eine bestimmte physikalische Entwickelung sehr verschiedenartiger Massen darstellt. Er scheint nur eine Stufe, und zwar wohl den Anfangspunkt, jenes Aufschäumens auszumachen, welches auf seinem Höhepunkt den Bimstein erzeugt. Der Piperno bildet noch geflossene Laven, während der echte Bimstein selbständig nur als Auswürfling existirt.

Die am kleinen St. Eliasberge auftretende rothe Lavaschicht liefert wohl auch den von Fiedler (Reisen Bd. II, S. 479) erwähnten rothen, leichten Baustein; doch versäumte ich leider mich an Ort und Stelle hiervon zu vergewissern. Derselbe ist natürlich kein „Bimstein" (ἐλαφρόπετρα), wie er genannt wird, sondern nur eine äusserst fein cavernöse Andesitlava von ziegelrother Farbe.

Zwei Gesteine möchte ich noch hervorheben, die beide am kleinen St. Eliasberge sich finden, das erste bildet eine mächtige Bank an seinem Gipfel, das andere beobachtet man als einen ausgedehnten Lavastrom, an seinem Abhange zwischen Vorvouli und dem von grauen Tuffen gebildeten Cap Columbo.

Das Gestein vom Gipfel des kleinen St. Eliasberges ist ein licht

1) Nach einer petrographischen Untersuchung der Sammlung vulkanischer Gesteine von den Azoren, welche das hiesige Universitätsmuseum der Güte der Herren Sir Charles Lyell und W. Reiss verdankt, kann ich Zirkels Vermuthung (Petrographie Bd. II, S. 226), dass der grösste Theil der früher zu den Sanidin-Trachyten gestellten Gesteine der Azoren Augit-Andesite sind, nur bestätigen.

aschgraues Gestein, das bei flüchtiger Betrachtung an Porphyrit erinnert; es ist sehr dicht und erst unter der Loupe treten die wenig zahlreichen, kleinen mit Feldspath ausgekleideten Hohlräume hervor. Die Grundmasse ist nicht mehr halbglasig, sondern feinkörnig, ähnlich wie in dem plattenförmig abgesonderten Andesit unterhalb Phira. Ihre aschgraue Farbe geht um die kleinen Poren und die ausgeschiedenen Krystalle herum, wohl durch eintretende höhere Oxydation, in ein röthliches Braun über. Vor Allem aber ist dies Gestein durch seine zahlreichen und sehr deutlichen Krystallausscheidungen ausgezeichnet. Mit grösster Klarheit treten die Zwillingsstreifen auf dem glasigen Feldspath hervor und zahlreiche Querschnitte durch die pechschwarzen, etwas zersetzt erscheinenden Augitprismen lassen leicht den characteristischen Säulenwinkel erkennen. Die Magneteisenkryställchen flimmern mit metallischem Glanze und nur die freie Kieselsäure sucht man vergebens. Wenn sie überhaupt vorhanden ist, müsste sie auch hier wieder in der Grundmasse stecken.

Den geraden Gegensatz zu diesem dichten Gestein macht die Lava jenseits Vorvouli, die in ausgezeichneter Weise zellig und schlackig ist. Ihre Hohlräume sind leer, aber in der deutlich feinkörnigen Grundmasse sind um so häufiger Mineralien ausgeschieden, und neben dem triklinen Feldspath fallen hier die sehr zahlreichen graugrünen Olivinkörner auf. Kleine lauchgrüne Säulen, die wohl mit Sicherheit als Augit gedeutet werden können, sind aber auch hier nicht häufiger als in den anderen Santoringesteinen. Leider liegt keine Analyse dieses Gesteins vor, so dass die Säuerungsstufe desselben unbekannt bleibt, und daher leider auch kein sicherer Rückschluss auf die Natur des Feldspaths möglich ist. Die Annahme, dass auch er nur Oligoklas sei, dürfte aber, zumal bei der grossen Aehnlichkeit des ganzen Gesteins mit manchen echten Augit-Andesiten wohl kaum zu gewagt erscheinen. Es liegt nahe bei dieser Gelegenheit auch die von K. v. Hauer (Jahrb. d. geol. Reichsanst. 1866 Verh. S. 79) publicirte Analyse zu Rathe zu ziehen, die für ein leider ohne genaueren Fundort angeführtes Gestein der Insel Thera einen um circa 11% geringeren Kieselsäuregehalt als in den übrigen Gesteinen nach-

weist. Berechnet man in dieser Analyse den Feldspath nach der vorhandenen Thonerdemenge — ein Verfahren, das bei dem nur spärlich vertretenen Augit, keinen grossen Fehler, jedenfalls aber nur zuviel Feldspath giebt — als Oligoklas, so ist jedoch nicht nur immer noch ausreichend viel Kieselsäure für diese Sättigungstufe vorhanden, sondern es bleibt selbst ein Ueberschuss, der bei einer, in Folge der analytisch nicht getrennten zwei Oxydationsstufen des Eisens, allerdings willkürlich angenommenen Menge von Magneteisen, ohne jeden Zwang auf Augit und Olivin sich verrechnen lässt.

Alle Erfahrungen weisen somit darauf hin, dass die Caldera von Santorin von Augit-Andesit-Gesteinen gebildet wird, die, wie die chemische Analyse lehrt nur durch einen wechselnden und zuweilen wohl ganz fehlenden Gehalt von freier Kieselsäure untereinander abweichen. Aber erst eine grössere Anzahl von Analysen könnte erkennen lassen, ob auch hier, wie an anderen Orten (cf. Roth Gesteinsanalysen p. XLIX) der höhere Kieselsäuregehalt mit der glasigen und schaumigen Ausbildung der Gesteine Hand in Hand geht.

Dass die Mehrzahl, ja vielleicht alle uns heute noch vorliegenden Santoringesteine, speciell aber die Tuffe submarin sich abgelagert haben, das ist wohl jedem Geologen wahrscheinlich gewesen, der Santorin besucht hat, aber erst K. v. Fritsch, W. Reiss und A. Stübel haben das Glück gehabt, den Beweis für diese Vermuthung durch die Entdeckung fossiler Meeresthiere in den Tuffschichten bei Acrotiri erbracht zu haben. Leider wissen wir aber bis jetzt weder in welcher Seehöhe, noch in welcher bestimmten Schicht dieselben gefunden wurden.

Beweisen diese Reste eine, wohl vorhistorische, grossartige Hebung des Terrains, so fehlt es auch nicht an Belegen für spätere, in historischen Zeiten erfolgte Senkungen. Nicht nur sind die antiken, von Ross (Inselreise Bd. I, S. 69) als das alte Eleusis gedeuteten Hafenbauten beim Cap Exomiti schon vor Jahrhunderten bis unter die Seefläche gesunken, sondern auch in die modernen, in dem kleinen Hafen unter Phira einst 5′ über dem Meere angelegten Magazine spülen jetzt die Wellen des ägäischen Meeres. Ross (a. a. O. S. 99) scheint diese Sen-

kung in die gleiche Zeit wie die Bildung der Nea Kaymeni setzen zu wollen; einige zuverlässige Einwohner versicherten mir dagegen wiederholt, dass dieselbe erst in diesem Jahrhundert Statt gefunden habe. Vielleicht bei dem grossen Erdbeben von 1802 (cf. Pègues Santorin 1842 S. 234).

Für die wohl behauptete Entstehung der weissen Andesittuffdecke in historischen Zeiten liegen noch keine zureichenden Belege vor. Auch M. F. Lenormant hat noch ganz kürzlich (Comptes rend. acad. inscr. et belles lett. 1866 S. 270) dies hervorgehoben. Selbst die neuesten Ausgrabungen auf Therasia, haben mich, nach den bis jetzt vorliegenden Beschreibungen wenigstens, hiervon noch nicht überzeugen können. Bei einem so lockeren und beweglichen Material wäre die sorgfältigste Untersuchung nothwendig, um eine so wichtige Thatsache zu erweisen, und da Herr Fouqué selbst noch nicht ganz sicher über ihr Alter ist (s. Comptes rend. T. 64, S. 668), so möchte auch ich das historische Alter der Tuffdecke noch bezweifeln.

3) Die Kaymeni-Inseln.

Wenn man bedenkt, welche grossartige Bedeutung diese erst in historischen Zeiten entstandenen Inseln für die Geologie haben, sollte man meinen, die Quellen, welche sie berichten, müssten längst so sorgfältig geprüft und Art und Zeit ihrer Bildung kritisch so genau fest gestellt sein, dass über sie kein Zweifel mehr bestehen könne. Das ist aber leider in Folge der weit auseinander gehenden Berichte der Schriftsteller nicht der Fall. In geologischen Werken werden bis in die jüngste Zeit sieben Inselgeburten verzeichnet, die in den Jahren 197 (bei einigen 184) vor Chr. Geburt und 19, 726, 1457, 1573 und 1707 unserer Zeitrechnung stattgefunden haben sollen. Gegen diese Angaben ist jedoch L. Ross in seiner reichhaltigen Inselreise Bd. I, neunter Brief (S. 86 u. ff.) aufgetreten. Der Umstand, dass man gegenwärtig nur noch die Resultate von vier Eruptionen unterscheiden kann, scheint ihn zuerst bedenklich gemacht und veranlasst zu haben, alle vorhandenen Quellen noch einmal mit der scharfen Kritik und Gründlichkeit des Philologen zu prüfen.

Er kam hierbei zu dem Resultate, dass bis zur Mitte unseres Jahrhunderts nur fünf inselerzeugende Eruptionen in glaubwürdiger Weise überliefert sind, die auf die Jahre 197 a. Chr. n., 46, 726, 1570 oder 73 und 1707–13 unserer Aera fallen. Nach einem sorgfältigen Studium seiner vortrefflichen Darlegung wird wohl Jedermann sich Ross nur unbedingt anschliessen können. Wenn aber trotzdem seine Resultate bis heute noch nicht die allein in der geologischen Literatur gültigen sind, so ist der Grund hierzu wohl bloss in dem für einen Geologen ziemlich entlegenen Ort ihrer Publication zu suchen [1]). Doch möchte ich darauf hinweisen, dass auch schon K. E. A. v. Hoff in seiner Geschichte der natürlichen Veränderungen der Erdoberfläche, die den Angaben in geologischen Werken wohl meist zu Grunde liegt, auf die unverkennbaren Spuren „der Corruption oder Nachlässigkeit" in den hier in Frage kommenden und verwirrenden Stellen des Plinius hinweist.

Da indess Ross immer noch eine Inselgeburt mehr übrig behält, als jetzt unterscheidbare Eruptionsproducte (supramarin wenigstens) vorliegen: so entsteht die Frage, wie diese auf jene zu vertheilen sind. Ross ist geneigt, die Mikra Kaymeni als die Thia des Jahres 46 zu deuten, die Inselgeburt von 1573 aber herabzudrücken zu einer blossen Vergrösserung. Er gedenkt jedoch ausdrücklich auch der Möglichkeit, dass die Thia wieder versunken und 1573, wie er sich ausdrückt, „zum zweiten Male emporgetaucht sei". Die geognostische Beschaffenheit der Mikra, die auch Ross als allein competenten Richter anerkennt, lehrt aber wie unten gezeigt werden wird, dass die Mikra ein verhältnissmässig neues Erzeugniss des Vulkans und somit 1573 entstanden ist. Sir Char-

---

1) Ich verdanke den Hinweis auf die Ross'sche Kritrik der Güte von Prof. E. Curtius. In einem populären kleinen Vortrage von mir über Santorin (A. Charisius 1867) hat sich bei der Correctur, die, während ich mit entfernt liegenden geognostisch-paläontologischen Arbeiten beschäftigt war, in einem kleinen Landstädtchen gemacht werden musste, auf S. 26 auch noch die Zahl 19 p. Chr. n. eingeschlichen. Ich bedaure aufrichtig so auch meinerseits, wenn auch nur durch ein Versehen, zur Aufrechterhaltung und Verbreitung der unbrauchbaren Angaben von Plinius beigetragen zu haben.

les Lyell (Principles 1853, S. 441) will dagegen, gestützt auf eine verdorbene oder falsche Stelle des Plinius, Thia nur als einen blossen Zuwachs und als ein Stück der heutigen Palaea deuten, wie früher auch schon Ordinaire gethan. K. v. Fritsch, W. Reiss und A. Stübel, haben auf der schönen Photographie (Taf. II) ihres Werkes über die Kaymeni zur Palaea Kaymeni ausser der Nikolaosspitze vom Jahre 723, wie Lyell die Thia des Jahres 46 und, wie Virlet (Hist. des Kaymenis 1867. S. 57), auch die — von Ross (und nach ihm von mir) bloss für einen Einsturz von der Palaea Kaymeni gehaltene — zweifelhafte Neubildung von 1457 der Palaea zugerechnet. Dass das Product des Ausbruchs von 723 sich mit der Palaea-Kaymeni (*Ἱερά*) verbunden, ist uns nicht allein ausdrücklich überliefert [1]), sondern man kann auch heute noch deutlich jenes Stück unterscheiden. Wie Virlet dazu kommt, dasselbe für ein Resultat von 1457 zu halten, ist mir unverständlich. Es liegt keine Berechtigung hierzu vor, da nach allen Beobachtungen die Palaea nur zwei verschiedenen Eruptionen ihre Entstehung verdankt und die Annahme von noch mehreren, etwa nicht oder doch nur sehr schwer unterscheidbaren Theilen, jedenfalls unnöthig ist.

Ross hat nämlich in seine Discussion bloss die drei centralen Kegel hineingezogen, die über die Seefläche aufragen und die Bank östlich der Mikra unberücksichtigt gelassen. Indessen ist es offenbar sehr wahrscheinlich, dass auch dieser vierte Centralkegel mit jenen, die gleiche Entstehung habe, da er aus derselben Basis aufragt und von der nachbarlichen Mikra sich in noch grösserer Höhe trennt, als wie früher die Nea von der Palaea. Auch Fritsch, Reiss und Stübel scheinen diese Meinung zu theilen. Wenigstens ist auf den schönen stereoskopischen Photographien des grossen Santorin-Reliefs von Stübel nicht bloss die Bank neben der Mikra, sondern auch noch der zweite, noch weiter östliche und viel weniger hohe, submarine Hügel in der gleichen Manier dargestellt, wie der submarine Columbo-Vulkan und die Kaymeni selbst. Da die Bank aber jetzt nur vier Fathoms unter der Seefläche liegt, so

1) cf. Theophanes. Chronogr. p. 269 C ed. Venet., 338—9 ed. Paris. in fol. *νῆσος ἀπογεωθεῖσα τῇ Ἱερᾷ λεγομένῃ νήσῳ συνήφθη, μήπω τὸ πρὶν οὖσα.*

musste ihre Eruption jedenfalls auch supramarine Ausbruchserscheinungen geben, die, wenn man nicht eine vorhistorische Eruption annehmen will, gewiss bemerkt und verzeichnet wurden. Ja bei den Zerstörungen, welche die Wellen des ägäischen Meeres an der Palaea-Kaymeni bewirkt haben, wird man leicht annehmen können, dass auch hier im Jahre 46 eine supramarine und nur später, vielleicht in den dunkelen Zeiten des frühen Mittelalters, denudirte und wiederverschwundene Klippe bestand.

Dieser Annahme steht jedoch schroff die Ansicht von Virlet gegenüber, nach welcher jene Bank erst in neuester Zeit sich so nahe unter die Seefläche emporgeschoben haben soll. Der eifrige Gegner der vulkanischen Erhebungen hat hier selbst eine solche angenommen und manche Geologen sind ihm nur zu gern nachgefolgt. Eine genaue Prüfung der Angaben, auf welcher sie beruht, zeigt aber, dass auch sie nur eine ungenügend beglaubigte ist. Es liegen über die Höhe, bezüglich Tiefe, der Bank nämlich nur die folgenden Angaben vor.

1794. Ende Juli (Anfang Thermidor an II) fanden Olivier und Bruguière (Olivier Voy. dans l'empire Othoman Bd. I, S. 365) „süd-südwestlich der Mikra den Meeresboden ansteigend und nur 15—20 Brasses tief [1]). Die Fischer der Inseln versicherten, der Boden habe sich seit einiger Zeit beträchtlich gehoben, was die bevorstehende Bildung einer neuen Insel anzuzeigen scheint". Die Identität des Ortes muss hier offenbar unsicher bleiben. Aber auch diese zugestanden, so ist doch nicht von einer ausgedehnteren Lothung die Rede, welche überzeugen könnte, dass sich die französischen Gelehrten wirklich über dem Gipfel des Hügels befunden hätten.

1829. Im Juni hatte nach Virlet (Expéd. scientif. S. 281) de Lalande die Bank mit der grössten Sorgfalt gemessen und fand bloss $4\frac{1}{2}$ Brasses.

1829. Am 15. Sept. fanden Bory de St. Vincent und Virlet nur $4-3\frac{1}{2}$ Brasses (ibid. S. 282).

1) et quelque distance sudsudouest de la petite Camène le fond de la mer s'élève et la sonde ne donne que quinze et vingt brasses.

1848 fand Cptn. Graves, wie seine ausgezeichnete Karte ausweist, 4½—4 Fathoms.

1866 fand ich selbst 5—4½ Faden.

Wie wenig die geringen mit Sicherheit hier beobachteten Differenzen zumal auf einem felsigen Terrain bedeuten wollen, wird Jeder, der selbst einige Erfahrungen im Lothen hat, wissen; er wird gewiss gern zugeben, dass die Bank von 1829 bis 1866 die gleiche Höhe gehabt hat und noch hat. Wie merkwürdig, dass der submarine Hügel gerade seit dem Zeitpunkte seiner ersten sorgfältigen Messung aufgehört hat emporzusteigen!

Für eine allmählige Hebung des Meeresbodens bei der Mikra liegen, bei der Unsicherheit und Unbestimmtheit der zur Beweisführung herangezogenen Messung bei Olivier, daher nur die Versicherungen einiger Fischer vor, deren Nation gerade durch die Productivität ihrer Phantasie berühmt geworden ist. Das reicht für ein Ereigniss von so einziger Bedeutung nicht aus. Die Annahme aber, dass die Bank erst supramarin war, allmählig von den Wogen abgespült und bis zu ihrer jetzigen Höhe oder Tiefe nivellirt wurde, ist eine durchaus einfache und natürliche, die allen geologischen Erfahrungen entspricht. Wird man dies zugeben, so ist es auch am einfachsten und wahrscheinlichsten anzunehmen, dass sie das Product der Eruption vom Jahre 46, das heisst, dass sie die Thia ist.

Eine Untersuchung der uns erhaltenen Berichte über die Entstehung der Thia liefert leider erst bei einer leichten und nothwendigen Verbesserung Material um diese Ansicht zu unterstützen. Seneca erwähnt einfach der Entstehung der Thia ohne weiteres Detail anzugeben. Die Stelle bei Plinius muss als falsch unberücksichtigt bleiben, sonst würde sie mit Ross's Emendation duodecim statt duobus stadiis noch besser auf die Bank als auf die Mikra passen. Aurelius Victor (in Claud.) Bericht wird wichtig durch die Angabe einer gleichzeitigen Mondfinsterniss, die (cf. Hoff a. a. O. S. 161) in der That in der Nacht vom 31. December zum 1. Januar der Jahre 46 und 47 stattgefunden hat. Dass Citat des Ammian. Marc. Lib. XVII, Cap. 7, §. 13 bei Ross ist irrig,

da daselbst die Entstehung der Hiera, aber nicht der Thia, ohne näheres Detail erwähnt wird. Die übrigen Stellen führen aber alle auf eine Quelle. Cedrenus hat den Syncellus und dieser bekanntlich den Eusebius ausgeschrieben, in gleicher Weise führt Orosius Lib. 7, Cap. 6 auf die lateinische Uebersetzung des Eusebius von Hieronymus, ebenso Cassiodor. Auch Dio Cassius scheint aus derselben Quelle, wie Eusebius geschöpft zu haben. Cassiodor setzt die Entstehung der Thia ein Jahr früher an als die übrigen, nämlich auf das Consulat des Vinicius und Cornelius, welcher letztere nach den Fasten in Corvinus verbessert werden muss. Dio Cassius aber giebt sie umgekehrt um ein Jahr später, 47 p. Chr. n. an. Alle ausser ihm sagen, dass um diese Zeit zwischen Thera und Therasia eine Insel von 30 Stadien Umfang auftauchte [1]). Diese beträchtliche Grösse von 30 Stadien, also ungefähr so gross als jetzt die Nea Kaymeni, ist der hier vorgeschlagenen Deutung der Thia allerdings ungünstig. Sie verträgt sich aber noch weniger mit den übrigen geologisch möglichen Annahmen. Die Angabe von 30 Stadien Umfang muss daher eine irrige sein. Alle Schwierigkeiten fallen aber, wenn man annimmt, dass die gemeinsame Quelle aller dieser Mittheilungen, dass Eusebius fälschlich *σταδίων Λ'* statt *σταδίων Δ'* geschrieben habe, was offenbar eine sehr leichte Emendation ist [2]). Die geringe Grösse von 4 Stadien unterstützt wesentlich die hier vorgetragene Ansicht, denn dass eine Insel, ein Lavatrümmerfeld, von nur 2400 Fuss Umfang in kurzer Zeit wieder von den Wellen vernichtet wurde und sich wieder unter der Fläche des Meeres verbarg, ist nichts Aussergewöhnliches.

Wenn man diese Deutung der Thia annimmt, so fallen alle Schwierigkeiten und es sind heute supramarin noch eben so viele Inselgeburten

1) Nach Syncellus (Chronogr. 333 b. ed. Goar) würde die Stelle bei Eusebius gelautet haben *Νῆσος μεταξὺ Θήρας καὶ Θηρασίας σταδίων λ' 'εφάνη.*

2) Diese Conjectur verdanke ich Prof. H. Sauppe, dessen Rath ich auch sonst bei dieser Gelegenheit in Anspruch genommen habe und der gegen die hier gegebene Deutung der Thia von philologischer Seite nichts einzuwenden fand.

erkennbar, als uns die Geschichte, ausser der Thia, überliefert hat. Für ihre Entstehung und ihr Wachsthum habe ich jedoch keine neueren inedirten Documente aufzufinden vermocht und kann daher unmittelbar zur geognostischen Beschreibung derselben übergehen.

A. Die Palaea-Kaymeni entstand 197 vor Chr. Geb. Ihre Form giebt die englische Seekarte und das schöne Relief der Kaymeni-Inseln von A. Stübel gut wieder. Die Palaea unterscheidet sich sehr von der Nea und Mikra Kaymeni, die einander sehr ähnlich sind. Während diese zwar wilde, von mächtigen Blöcken gebildete, aber meist sanft und nie über 35° ansteigende Ufer und einen wirklichen vulkanischen Kegel mit Kraterbecken besitzen: ist die Palaea nur eine steil aus dem Meere aufragende Klippe, deren flacher, von den Abhängen scharf abgesetzter Rücken nach Süden allmählig bis zu 52, 33 T. (= 102 M.) nach eigenen Messungen [1]) ansteigt. Gerade unter dieser Höhe fällt der Abhang nach Osten sehr steil ab und bildet so ein ausgezeichnetes Cap. In ähnlicher Weise ist der Nordöstliche Abfall der Palaea unnatürlich steil und die grossen vor demselben im Meere liegenden und z. Th. noch als Klippen über dasselbe aufragenden Felsmassen deuten auf eine grossartige Abrutschung, die hier stattgefunden hat. Das machen auch die Structurverhältnisse der Palaea wahrscheinlich. Ueberall rings um die Palaea sieht man die Abspülungen und Zerstörungen, welche die Wellen des Meeres offenbar nur in einem längeren Zeitraum bewirken konnten. Das Landen und Besteigen derselben ist daher an den meisten Punkten sehr mühsam und schwierig. Einzig bei der flachen Landspitze, welche im Jahre 725 auftauchte und die Palaea vergrösserte, ist eine zum Landen geeignete kleine Bucht und hier führt auch ein ziemlich bequemer Pfad auf den flachen Rücken der Insel. Dieser letztere ist schon mit einer ziemlich dichten und gegen die fast ganz kahle Nea angenehm hervortretenden Grasnarbe bedeckt. Ich fand sogar mehrere Pferde und Esel auf ihr vor, die man zur Weide daselbst zurückgelassen hatte.

---

1) Nach Fritsch, Reiss und Stübel (Kaymeni-Inseln Taf. II) 99 m. = 324, 72′ Engl.

An den abgespülten Steilgehängen der Palaea und besonders an dem hohen Cap ist der innere Bau der Insel schön bloss gelegt. Schon von Weitem erkennt man die von dem Bau der Caldera und der gewöhnlichen Vulkane ganz abweichende Structur. Hier ist kein Wechsel von ausgeflossenem und ausgeworfenem Material, keine durch abwechselnde Tuff- und Lava-Lager erzeugte Schichtung. Das homogene Gestein steigt massig aus dem Wasser auf bis zur Höhe. Man glaubt sich vor einer mächtigen Porphyr- oder Melaphyr-Klippe. Die Absonderung ist eine plattenförmige und deutlich tritt hier die Anordnung der einzelnen Platten zu einer schaligen, sphaeroidischen Gestalt in grösstem Maassstabe hervor. Ueberall, ringsum und auf dem Rücken der Insel, sieht man nur e i n e homogene Masse, die soweit ich zu erkennen vermochte auch nur aus e i n e m glühenden Flusse erstarrte. Die Plattung des Gesteins tritt vielfach hervor. Auch grössere gangartige Spalten, die ziemlich genau parallel der Längsaxe der Palaea laufen, sind zu beobachten. Besonders deutlich ist eine Kluft ausgeprägt, die westlich von dem Cap dicht neben dem Nordöstlichen Abhange der Insel bis zum Nikolaos-Hafen verläuft. Andere erkennt man in dem flachen Rücken der Insel und sehr schön auch auf der Höhe des Caps, wo man an einer Stelle eine breccienartige Bildung in einer derselben bemerkt.

In der Regel zeigt aber das halbglasige Gestein, das ihre Ränder bildet, nur eine eigenthümlich abgeschliffene Fläche, eine Art Spiegel, der auf eine Gleitung in der Masse, wohl noch im halberstarrten Bestande, hindeutet. Eine solche Spalte mag auch die Abspülung am Nordwestlichen Ufer und den unnatürlich steilen und geradlinigen Abhang an dieser Stelle veranlasst und erleichtert haben.

Hervorheben möchte ich schliesslich noch die kleine Südlich von der Palaea gelegene und nur durch einen wenige Fuss tiefen Meeresarm getrennte Klippe. Sie war zu Beobachtungen und Messungen an der Aphroëssa besonders geeignet. Der Kürze wegen werde ich sie als „Stations-Klippe" aufführen.

Wenn dasGestein, aus welchem die Hiera der Alten sich aufbaut, eine homogene Masse bildet, so ist es doch nicht überall gleichartig aus-

gebildet. Der (freie Kieselsäure enthaltende?) Andesit zeigt vielmehr auch hier sehr wechselnde physikalische Zustände. Von dem feinkörnigen bis zum halbverglasten und obsidianartigen, vom ganz dichten bis zum porösen und zelligen, von der völlig richtungslosen Structur bis zur ausgeprägt plattigen sind alle Stufen zu beobachten. Stets aber deuten die bald in grösserer, bald in geringerer Menge porphyrisch ausgeschiedenen Krystalle auf die nämliche Gesteinsart. Es herrscht der glasige Feldspath, der auch hier wiederum in den meisten Fällen als triklin erkannt werden konnte. Neben ihm sind besonders kleine glänzende Magneteisen-Oktaëderchen und dunkelgrüne Augitsäulchen häufig.

Dagegen konnte über die Art der Vertheilung der einzelnen Varietäten keine Sicherheit gewonnen werden. Doch scheinen, übereinstimmend mit den Anforderungen der Theorie, die feinkörnigen Varietäten mehr unter dem hohen Cap und an dem steilen Abhang des Nordostufers vorzukommen, während an den flacheren Ufern und so auch an der Stationsklippe die halbverglasten und obsidianartigen vorherrschen. Das Gestein ist hier immer noch ziemlich dicht. Schwarze halbglasige Streifen wechseln ab mit helleren graulicheren, die, ein Haufwerk von feinen Feldspath-Krystallchen, eine weniger dichte fein poröse Structur zeigen. Die Wellen des Meeres greifen diese letzteren ziemlich stark an und die ausgewaschenen, in Züge geordneten Hohlräume geben dann äusserlich den Felsen in der Nähe der Seefläche ein schlackiges Aussehen, das ihnen im Innern gänzlich fehlt. Ein lockereres, fein poröses Gefüge bei noch „steiniger" Beschaffenheit zeigen die Felsen unter dem hohen Cap. Ein ausgezeichnet poröses Gestein mit vorherrschender, dichter Masse beobachtet man über dem kleinen Nikolaos-Hafen. Diese Grundmasse ist nicht mehr halbglasig und damit auch nicht mehr dunkelbraun bis schwarz, sondern aschgrau mit zahllosen, aber sehr kleinen ausgeschiedenen Feldspäthen. Die Poren sind weiss oder röthlich, auch sie sind mit äusserst feinen Feldspathviellingen ausgekleidet. Es erinnert diese Andesitvarietät stark an die porösen Partien in der obersten Lavafelsbank, unter Phira. Noch grösser ist aber die Aehnlichkeit der plattenförmig abgesonderten Varietät des nämlichen Lavastroms mit einem an demselben

Punkte der Palaea vorkommenden Gesteine. Dasselbe zeigt die gleiche dichte, graue Grundmasse, die gleiche ausgezeichnet plattenförmige Structur, die pfirsichblüthrothen bis braunen Absonderungsflächen, die auch hier bald glätter, bald ebenfalls rauher und von sehr feinen triklinen Feldspäthen überzogen sind. Besonders deutlich sind diese kleinen Feldspathtäfelchen in einzelnen grösseren Hohlräumen auskrystallisirt.

In diesem plattenförmig abgesonderten Andesit beobachtete ich kleine Einschlüsse, die manchen der später zu erwähnenden, in den Laven von 1866 ähnlich sind und wesentlich ein veränderter Augit (?mit Anorthit) zu sein scheinen. Die lauchgrün und weiss gesprenkelte Masse ist blasig aufgetrieben und in den Poren, sowie auf dem Einschluss, in einem von der umschliessenden Masse gebildeten Hohlraume sind feine schneeweisse Nadeln auskrystallisirt, die durch die ganze Art ihres Vorkommens und die Verhältnisse ihrer Spaltbarkeit so sehr an den Wollastonit der Sommablöcke erinnern, dass ich auch sie unbedenklich für Wollastonit halte. Da derselbe sich nun zweifellos erst nach der Einschliessung bildete, so wäre zu vermuthen, dass der Wollastonit hier durch die Umschmelzung von Augit (?und Anorthit) entstanden sei. Die auf dem umschliessenden Andesit, aber in demselben Hohlraume mit dem Wollastonit ausgeschiedenen Feldspath-Kryställchen konnten leider nicht genauer bestimmt werden.

B. Die Nikolaos-Spitze. Das Produkt der Eruption von 725 unserer Zeitrechnung bildet nur eine flache Landspitze an dem Nordostufer der Palaea, die sich durch den gänzlichen Mangel an Vegetation das frische, tief schwarze Aussehen der Lavablöcke und deren kaum von den Wellen abgerundeten Kanten auf den ersten Blick von der übrigen Palaea, der alten Hiera, ablöst. Dieselbe bildet nach Süden mit der Hiera eine kleine Bucht, in welcher man, wie erwähnt, allein bequem an der Palaea landen kann. Da nun an diesem kleinen Busen, wenn auch etwas weiter Südlich und auf der Hiera, eine kleine Kapelle des heiligen Nikolaos steht und die Santorinioten die ganze Gegend hiernach „bei dem Nikolaki“, dem kleinen Nikolaos, nennen, so ist es am

einfachsten für die in Rede stehende Landspitze den Namen „die Nikolaos-Spitze" anzunehmen.

Die Nikolaos-Spitze ist ein wüstes Trümmerfeld von halbglasiger Lava, deren scharfkantige Blöcke regellos durcheinander liegen und auch ringsum als zahlreiche, kleine Klippen und Riffe aus dem Meere aufragen. Sie werden bald von einem schwarzen, halbglasigen und dann dichten, nicht rauh anzufühlenden Andesit gebildet, wie er auch auf Thera am häufigsten ist, oder es ist ein dunkelbraunes, fein poröses und dann in Wahrheit „trachytisches" Gestein. Diese zweite Ausbildung ist den 1866 erzeugten Massen ausserordentlich ähnlich und in einzelnen Handstücken ununterscheidbar. In beiden Varietäten konnten in der Mehrzahl der Fälle die ausgeschiedenen Feldspäthe als trikline bestimmt werden.

C. Die Mikra Kaymeni. Entstand 1573. Dass sie nur geringen Alters ist, beweist ihre ganze Erscheinung deutlich. Nirgends finden sich Unterwaschungen und continuirliche Steilgehänge, wie an der Palaea. Die Ufer werden vielmehr umsäumt von zahlreichen kleinen Riffen und Klippen, die durch die scharfkantigen, aus dem Trümmerfelde heraustretenden Blöcke gebildet werden. Allerdings ist die Mikra immer noch dichter bewachsen, als die Nea Kaymeni. Am Südabhange des Kegels finden sich zahlreiche kleine Grässer und Kräuter und bei einem kleinen Feigenbaum am Nordostufer pflegt man zu landen. H. J. Schmidt und H. Christomanos theilten mir aber mit, dass der Kegel der Nea früher ganz ähnlich bewachsen gewesen sei und erst durch die Verwüstungen der Explosion am 20. Februar 1866 sein heutiges ödes Ansehen erhalten habe. Auch die Ansicht, dass die Mikra aus zwei, in verschiedenen Perioden gebildeten Stücken bestehe, ist, so wahrscheinlich sie auch bei der Betrachtung der Insel aus einiger Entfernung erscheinen mag, eine falsche. Die Mikra ist nur aus einem Gusse entstanden, gerade so gut wie (bis 1866) die ihr so ausserordentlich ähnliche Nea Kaymeni.

Die Mikra Kaymeni wird gebildet durch einen abgestutzten Kegel, der mit circa 32°, d. i. also mit dem gewöhnlichen Neigungswinkel der

Eruptionskegel aufragt, und nur nach Norden sehr allmählich an Höhe abnehmend sehr sanft abfällt. Nach Westen, Süden und Osten ist der Kegel, wie andere auch, mit Lapillen und Asche bekleidet, aus denen nur hie und da ein Lavablock hervorragt. Aber nach Nordwesten ist der sanfte Abhang, der sich in dieser Richtung weit fortschiebt, ein wüstes, von mächtigen, scharfkantigen und halbglasigen Lavamassen gebildetes Trümmerfeld. Die höchste Höhe der Insel liegt wie bei den übrigen Kaymeni in ihrem südlichsten Theile; der Kegel erreicht hier 37,36 T. (= 72,8 M.) Seehöhe [1]). Etwas weiter nach Südwest von dieser höchsten Wölbung ist ein ziemlich tiefer Einschnitt in dem Kegelrande und hier kann man bequem in den Krater, der in den Kegel eingesenkt ist, hinabsteigen. Derselbe hat ungefähr 30 T. (60 M.) im Durchmesser und ist nach meiner Messung mit dem Quecksilber-Barometer am 1. April, die für den Kraterboden 16,07 T. (= 31,3 M.) Seehöhe ergab, 21,3 T. (= 41,5 M.) tief. In ihm kann man gut den Bau des Kegels studiren. Aber wie erstaunt man bei der ganz übereinstimmenden äussern Beschaffenheit mit andern Eruptionskegeln, hier eine ganz abweichende Structur zu finden. Statt der abwechselnden Lava- und Aschenschichten, die man erwartet hatte, steht man auch hier wieder vor ungeschichteten massigen Lavafelsen, die nach allen Richtungen vielfach zerborsten und zerklüftet sind und ringsum steil aufsteigen. Einzelne Bruchstücke haben sich schon aus ihnen losgelöst und liegen als grosse scharfkantige Blöcke den Kraterboden verengend und ausfüllend umher. Das Gestein ist dicht und halbverglast. Nur am Nordnordost-Gehänge, in der Richtung auf einen grossen Hauptspalt zu, findet sich eine ungefähr 6′ mächtige seigere Gesteinsplatte, die porös und zellig ist, mit Spuren des früheren, glühenden Flusses. Die Hauptkluft in ihrer Nähe setzt nach Nord 12° Ost noch ziemlich weit fort, erweitert sich zuweilen, nimmt andere anschaarende Spalten auf und ist hie und da ausgefüllt oder durch Lavablöcke überbrückt. So entsteht ein sehr unregelmässiges Terrain, dessen Ueberblick durch die vielen, oft grossen Blöcke noch mehr erschwert

1) Fritsch, Reiss und Stübel (Kaymeni-Inseln Taf. II) geben 68,6 m. = 224′ Engl.

wird. Am besten lässt sich dasselbe noch als eine Reihe unregelmässiger, meist Nordsüdlicher Furchen und Rücken bezeichnen. Einige jener Mulden sind es wohl gewesen, die Choiseul de Gouffier verleitet haben, auf seiner für jene Zeit sonst recht guten Darstellung der Kaymeni der Mikra fälschlich 6 Krater zuzuschreiben. Endlich beobachtete ich von der Spitze der Nea aus wiederholt eine breite spaltenartige Furche, die in Nordwestlicher Richtung die Nördliche Hälfte der Mikra vom Westlichen Ufer bis nahe an das Oestliche durchzieht. Nach einigen Mittheilungen wäre dieselbe erst während der letzten Eruption, bei der grossen Explosion am 20. Februar, entstanden.

Das Gestein, aus dem die Mikra besteht, ist wiederum der nämliche dunkele Andesit in seinen verschiedenen Ausbildungsweisen. Doch ist der Olivin hier häufiger und öfters in grösseren Körnern ausgeschieden; die Structur ist weniger dicht und mehr fein porös, ja zuweilen in ausgezeichneter Weise schlackig. Die oben erwähnte Gesteinsplatte in dem Krater ist sogar stellenweise schaumig und bimsteinartig. Parallelstructur, abwechselnd dichtere und lockerere poröse Lagen, die letzteren mit sehr feinen Feldspath- und Magneteisenkrystallchen, sind häufig. Die Feldspathkrystalle lassen fast immer Zwillingsstreifen erkennen. Der Augit tritt sehr zurück.

Ein Block auf der Höhe der Mikra, etwas Nördlich vom Krater und am Rande einer kleineren Kluft gelegen, erschien fast breccienartig durch seine zahlreichen Einschlüsse. Dieselben sind grau oder gebrannt-hellroth, scharfkantig, dicht, erdig, bald mehr an gebrannten Thon, bald an Porcellan erinnernd. Einzelne ähnliche kleine Einschlüsse wurden ebensowohl in den Gesteinen des Kraters als des Ufers beobachtet. Ueber ihre ursprüngliche Natur kann man leider bis jetzt nur Vermuthungen hegen. Wahrscheinlich ist es umgewandelter Thonschiefer.

D. Die Nea Kaymeni. Sie entstand bekanntlich am 23. Mai 1707. Ihre allgemeine Gestalt stimmt durchaus mit der Mikra Kaymeni. Auch sie ist ein grosses Lavatrümmerfeld, das nach Süden allmählich aufsteigt zu einem aschenbedeckten Eruptionskegel von circa 35° Neigungswinkel. Doch ist sie nicht nur weit grösser und ihre Ufer manch-

faltiger, sondern sie ist auch höher, denn ihre Seehöhe erreicht nach meinen Messungen 56,09 T. (= 109,3 m.)[1]. Das Kraterbecken der Nea ist zwar grösser als das der Mikra, aber dafür weit flacher als dieses. Nach Nordwest ist gar kein Kraterrand mehr vorhanden, sondern der unregelmässige Grund desselben verläuft unmittelbar in die mächtigen Blockfelder ausserhalb. In der Anordnung dieser habe ich keine Regel finden können. Zwar vermuthete auch ich einmal eine radiale, so zu sagen stromartige Vertheilung, aber sie war mir nicht deutlich genug ausgeprägt. Der Boden des flachen Kraterbeckens ist von Asche und Lapillen bedeckt, aus denen viele Lavafelsen von oft eigenthümlich breccien-artiger Beschaffenheit hervortreten. Die innere Structur ist nur wenig blossgelegt, aber sicher ist auch hier kein Schichtenwechsel vorhanden. Nur ein Paar oberflächliche Aschenlagen auf dem Südwestlichen Kraterrande sind geschichtet und fallen sanft nach dem Centrum zu. Quer durch das Kraterbecken streicht Ostnordost ein grösserer Spalt, auf den viele kleinere zulaufen. Alle sind erst am 20. Februar 1866 entstanden. Auf der Aussenseite des Kraters finden sich in den Lapillen und Aschen mehrere Erdfall-artige auf der steilen Böschung natürlich nur halbkesselförmige Einsenkungen, die wohl den unter ihnen befindlichen Spalten ihre Entstehung verdanken. Das Vorhandensein dieser letzteren erklärt dann auch leicht die schwachen Fumarolen, die 1866 aus einigen von ihnen hervordrangen. Dass auch schon früher, bei der Entstehung der Nea an der Höhe des Kegels eine ausgedehnte Fumarolen-Thätigkeit statt hatte, das lehren die gebleichten und buntgefärbten Laven, denen man mehrenorts begegnet.

Eine besondere Begehung wurde der grossen Spalte gewidmet, die unter dem Kegel der Nea, das grosse Trümmerfeld zwischen dem Georg und der Aphroëssa durchzieht. Dieselbe war ungefähr 30' tief zu beiden Seiten von Lavatrümmern begrenzt und nicht von Lavabänken, wie Herr Fouqué, mit dessen Beobachtungen über diese Spalten sonst die meinigen gut stimmen, behauptet (Comptes rend. ac. sciences 1866, S. 901).

1) 195,2 m. = 345' Engl. nach Fritsch, Reiss und Stübel.

Die tieferen Theile und der Boden sind mit feinerem Schutt und Asche erfüllt; Fumarolen fanden sich an ihrem Rande und in ihr, doch konnte ich sie am 1. April ohne Gefahr in ihrer ganzen Länge durchschreiten. Mehrere nur wenig kleinere Parallelspalten fand ich Nördlich von ihr; auch mehrere Querspalten liefen auf sie zu. Sie sollen sich sämmtlich erst während des ersten Anfangs der Eruption von 1866 gebildet haben. Den kleinen Krater, den Fritsch, Reiss und Stübel (a. a. O. in Taf. II a (blau)) neben den von ihnen nur sehr klein beobachteten Spalten angeben, hatte ich nicht gefunden. Ich könnte ihn übersehen haben, doch ist mir das bei der wiederholten Aufmerksamkeit, die ich dieser Gegend schenkte, unwahrscheinlich. Sollte auch er sich erst während der Eruption von 1866 gebildet haben? Die Beschaffenheit des Beckens müsste dies darthun.

Diese Lavatrümmerfelder, die ringsum in einzelnen Blöcken und Riffen in das Meer hinausreichen, gehören bekanntlich alle der île noire des Jahres 1707 an. Von der île blanche, die als *Λοφίσκος* noch bis 1866 bestand (cf. Schmidt i. Peterm. Mitth. 1866, S. 141) war während meines Besuches nichts mehr zu sehen. Der Lavaerguss des „Georg" hatte sie völlig überdeckt. In der hiesigen geologischen Sammlung findet sich jedoch in einer von J. Hawkins gesammelten und schon von L. v. Buch und Virlet erwähnten Suite von Santoringesteinen ein grauer Bimstein vor, der nach der Etikette „Neue Kaymeni" von der île blanche herrührt. Derselbe ist schon in Farbe und Gefüge leicht zu unterscheiden von dem gelblichen, faserigen Bimstein in der weissen Tuffdecke der Caldera. Er ist aschgrau und schaumig; die bekannte Vergleichung mit einem Brode charakterisirt nicht übel seine dichteren Varietäten. Die in ihm ausgeschiedenen Mineralien erkennt man erst bei einer sorgfältigen Betrachtung. Ein deutlich trikliner Feldspath und zierliche Magneteisen-Octaeder sind bei stärkerer Vergrösserung leicht zu unterscheiden. Seltener ist der augitische Bestandtheil, doch glaube ich auch ihn mit Bestimmtheit als Augit angeben zu können.

Die Gesteine der île noire sind denen der früheren Eruptionen wieder ganz gleich. Es ist der nämliche dunkele, bald ausgezeichnet

halbglasige und dichte, bald mehr poröse Augit-Andesit, dessen Varietäten einst wohl nur nach den zahlreichen Klüften und Fugen geordnet, jetzt regellos neben einander und durch einander liegen. In allen sind zahlreiche deutlich gestreifte Feldspäthe ausgeschieden, neben denen fast noch häufiger das metallische Flimmern des Magneteisens auffällt. In den dichten, fast obsidianartigen Varietäten findet sich häufig Olivin, zuweilen in ziemlich grossen Körnern ausgeschieden. Die lauchgrünen Augitsäulchen sind daneben nur selten. In der fein porösen und dadurch ausgezeichnet „trachytischen" Varietät, wie sie z. B. schön an einzelnen Felsen des Kraterbeckens zu beobachten ist, habe ich dagegen den Augit zwar ebenfalls nur selten, Olivin aber gar nicht gefunden. In den feinen Poren sitzen oft sehr zierliche, mikroskopische Kryställchen. Gewöhnlich zeigen sie auf dem Objecttische des Mikroskops einen sechsseitigen Umriss. Es scheinen kleine, trikline Feldspäthe zu sein, die auf $M = (b : \infty a : \infty c)$ liegen.

4. Die Eruption von 1866.

Indem ich mich diesem neusten vulkanischen Ausbruche zuwende, muss ich zuerst in gleicher Weise, wie dies schon früher mein verehrter Freund Herr Dr. J. Schmidt zu Athen gethan hat, in Bezug auf die über dieselbe vorliegenden Berichte, die grösste Vorsicht und die strengste Kritik dringend anempfehlen. Besonders bedaure ich, nach den von mir an Ort und Stelle gemachten Erfahrungen, gerade den ausführlichsten Mittheilungen, die in einer Serie von Briefen von einem sonst gewiss sehr verdienten Santorinioten publicirt wurden, durchaus misstrauen zu müssen.

Nach den von Augenzeugen eingezogenen und streng geprüften Mittheilungen konnten für die Zeit vom Beginne der Eruption bis zum 11. Februar, das ist bis zum Eintreffen der griechischen wissenschaftlichen Commission, nur die folgenden Thatsachen mit einiger Glaubwürdigkeit festgestellt werden.

Den eigentlichen Eruptionserscheinungen ging eine langsame wenig bemerkbare Senkung des Terrains südlich von dem Nea-Kegel voraus,

deren erster Anfang nicht genau bekannt ist, aber in die letzten Tage des Januars 1866 fällt; J. Schmidt nimmt den 27 an, Andere die Nacht vom 28. zum 29. Januar, während welcher diese Senkung schon so bedeutend war, dass die Familie von Nikolaos Fasciotis, die an dem kleinen Vulkano Hafen wohnte, durch ein lautes Getöse geweckt wurde und am Morgen Spalten in ihrem Hause fand. Bald darauf zeigten sich auch Spalten in dem Boden und um diese Zeit sollen auch schon die oben erwähnten grossen Spalten zwischen dem heutigen Georg und Aphrëossa sich gebildet haben. Gleichzeitig sah man das Meer etwas Südlich vom Hafen sich in kurzen Wellen kräuseln (*clapoter*). Eine beträchtlichere Temperaturerhöhung soll dabei nicht stattgefunden haben, wohl aber hätte das Meer daselbst eine eigenthümliche, bald mehr röthliche, bald mehr grünliche Färbung gezeigt. Aus den folgenden Tagen wird bei andauernder, Tümpel bildender Senkung des Bodens berichtet, dass die Häuser über einen Finger breit in einer Stunde sanken. Unterirdisches Getöse, aber ohne Erdbeben, wurde beobachtet. Die ersten Dampfwirbel und Abends die ersten Lichterscheinungen (*des flammes*, *φλόγες* cf. J. Schmidt i. Peterm. Mitth. 1866, S. 141) steigen auf. Am 1. Februar erheben sich die ersten schon erstarrten und schwarzen Trümmer des neuen Lavastroms über das Meer. Ringsum ist die See ziemlich stark erhitzt und das Wasser fliesst von dem Wärmequell ab. Die neue Klippe, die den Namen Georg I erhält, nimmt an Umfang und Höhe zu, jedoch nur unregelmässig, bald hier, bald dort, bald auch wieder sich stellenweise senkend. Immerhin war das Wachsthum ein so bedeutendes, dass sie schon nach wenigen Tagen (am 5. Februar?) die Nea Kaymeni berührte. Ueber die Einzelnheiten dieses interessanten Zeitpunktes, über die allmählige Ueberfluthung der alten flachen Neaufer durch die neue Lava, waren aber leider keine brauchbaren Nachrichten zu erhalten. Dagegen will man in dieser Zeit auch schon Wallungen und Gasentwickelung an der Stelle, Westnordwestlich der früheren Phlevaspitze, bemerkt haben, wo bald darauf die Aphroëssa auftauchte.

Am 11. Februar Vormittags traf die griechische Commission in San-

torin ein und mit diesem Datum beginnen die zuverlässigen Beobachtungen der Herren J. Schmidt, Palaska, Mitzopulos und Christomanos. Ueber dieselben, die bis zum 26. März reichen, hat J. Schmidt bekanntlich schon eine Uebersicht in Petermanns Mittheilungen 1866 (S. 141 und 42) und in den Verhandlungeu der k. k. geologischen Reichsanstalt 1866 (S. 35 bis 38) gegeben. Den gleichen Zeitraum schildern auch die Briefe v. Dr. Christomanos, die in den Sitzungsberichten der Wiener Academie (Bd. 53) abgedruckt und auch separat in den Handel gekommen sind. Den Zustand der Eruption Anfang März stellen die vortrefflichen Bemerkungen des Linienschiffsfähnrichs Fehr von dem k. k. Kanonenboote „Reka" in den Verhandlungen der k. k. geologischen Reichsanstalt 1866 (S. 39 bis 54), dar und aus denselben Perioden stammen auch die zwei Briefe Herrn Fouqué's in den Comptes rendus 1866 (S. 796 und 896), die aber leider von dem Grundzuge der ganzen Eruption, wie von manchem Detail nur ein wenig correctes Bild geben. Durch die Güte der Herren, von der griechischen, wissenschaftlichen Commission und besonders J. Schmidt's bin ich aber im Stande diesen Publicationen einige noch nicht veröffentlichte Data hinzufügen zu können.

Der erste Fels, der Aphroëssa, erschien am 15. Februar um 10 Uhr 15 Minuten Vormittags. Weder er noch seine ihm nachfolgenden Genossen waren mit Actinien und Seemuscheln bedeckt. Prof. Mitzopulos, der nach der übereinstimmenden Versicherung der Santorinioten solche gesammelt und nach Athen mitgenommen haben sollte, hat mir dies auf meine Anfrage ausdrücklich versichert. Offenbar war die Lava noch zu neu und erst seit zu kurzer Zeit erstarrt, als dass schon damals Meerthiere auf ihr sich angeheftet haben konnten. Auch der Georg zeigte keine aufgewachsenen Seethiere.

Grosse Block- und Aschenauswürfe hatte der Georg nach J. Schmidt in der zweiten Hälfte des Februar fünf, die statt fanden:

1866 Februar 20. — 9 hor, 36 m.
„ 21. 0 „ 49 „

1866 Februar 22. —5 hor. — m.
" 22. 3 " 13 "
" 27. —2 " — "

Die Zeiten mit vorgesetztem — sind hierbei die Stunden von Mitternacht bis Mittag. Ueberhaupt wurden vom 11. Februar bis zum 26. März, mit Ausschluss jedoch der Zeit vom 23. Februar Mittags bis zum 1. März 5 h. (Aufenthalt in Milo) von J. Schmidt 53 Aschenausbrüche beobachtet. Unter ihnen wird nur eine als zweiten Ranges angegeben: am 21. Februar 2 h., 31 m. Alle anderen waren schwächer. Vier sind unsicher, einige zum Theil Dampferuptionen.

Die Thätigkeit der Aphroëssa steigerte sich während der grossen Ausbrüche des Georg nur unmerklich oder gar nicht. Dagegen beobachtete J. Schmidt am 11. März eine Ascheneruption mit Steinen, die er aber nur als vierten Ranges angiebt.

In die Zeit der grossen Stein- und Aschenausbrüche fällt auch die einzige, ziemlich glaubwürdige, überlieferte Erschütterung, nämlich in die Nacht vom 21. zum 22. Februar, ungefähr zwei Uhr.

Eine Reihe von Lothungen, die vor meiner Ankunft, in der zweiten Hälfte des März von Herrn Lieutenant Sieverth auf S. M. Corvette Nymphe angestellt wurden, werden mit seiner und des Herrn Capitain Henck Erlaubniss hier ebenfalls publicirt und sind auf der Karte eingetragen. Es sind die nämlichen, die auch schon Herr Christomanos mitgetheilt hat.

Als ich am 29. März in Santorin eintraf, fand ich den Vulkan zwar in einer Periode verhältnissmässiger Ruhe, aber immer noch so stark arbeitend, als die vorhergegangene Zeit. Ueber dem Georg stand eine im Mittel etwa 70 Meter hohe Säule, eines vollkommen weissen, zu kleinen Wölkchen zusammengeballten Dampfes, die in den höheren Regionen von dem sturmartigen Nordwinde gefasst, auseinander geweht und fern hin nach Kreta hingetrieben wurde. Ueber der Aphroëssa schwebte eine etwas weniger hohe, durchscheinende, in sich nicht gegliederte Säule eines licht-rost bis zimmtbraunen Dampfes, die selbst in ihrem oberen Theile nur wenige Wasserdämpfe zeigte. Sie erinnerte

sehr an wirkliche Rauchsäulen. In der zweiten Woche meines Aufenthaltes nahm dann aber die Intensität wieder zu und bedeutende Aschen-eruptionen erfolgten. Die Eruptionsmassen selbst wuchsen fortwährend, aber es kamen wenigstens supramarin keine wesentlichen Umgestaltungen in ihnen vor. Alle Erscheinungen liessen übereinstimmend erkennen, dass dieselben nur durch das Aufsteigen einer langsam nachquellenden, sehr zähflüssigen Lava bedingt werden. Eine Ansicht der drei Kaymeni-Inseln und der Eruption, wie sie während meines Besuchs (2. April) in den Augenblicken verhältnissmässiger Ruhe erschien, habe ich versucht auf Tafel I zu geben.

Die bei Anfang des Phänomens eingetretene Bodensenkung hatte nur die Südlich von dem Kraterkegel der Nea Kaymeni gelegenen flacheren Landzungen getroffen. Am Ostrande der Oestlichsten derselben bei einer kleinen Hafenanlage standen noch einige gewöhnlich als „Badehäuser" bezeichnete Gebäude. Hier hatte sich die Senkung auf eine Strecke von circa 150 Meter Breite von Nord nach Süd erstreckt. Der Nördliche Theil des Quai hatte sich entweder gar nicht oder doch nur unmerklich gesenkt; je weiter man aber von da nach Süden fortschreitet, um so bedeutender ist die Senkung und nach dem Südlichsten, eben noch über das Meer hervorragenden Hause zu urtheilen, beträgt sie hier wenigstens 2,5 Meter. Wie weit diese Senkung sich nach Westen zu erstreckt, konnte wegen des Mangels an entscheidenden Marken nicht ermittelt und ebensowenig festgestellt werden, ob die Senkung in gleichem Abstande von einer als unbewegt geblieben zu denkenden Axe eine gleichwerthige sei, oder nicht. Es ist offenbar, dass eine derartige Senkung parallel einer unbewegten Axe Spalten erzeugen musste, und dass, da diese wirklich vorhanden sind, auch die Beschaffenheit und Richtung dieser Axe sich aus der Richtung der Spalten ermitteln lassen muss. Da nun von den grossen Spalten nicht nur die schon erwähnte circa 20 Meter breite, zwischen Georg und Aphroëssa, die mit der Senkung in einem nachgewiesenen Zusammenhange steht, sondern auch die zwei anderen die nach Jul. Schmidts Angaben erst während der Periode gesteigerter Intensität in der zweiten Hälfte des Februar's entstan-

den, nämlich die Spalte im Kraterkegel der Nea Kaymeni und die Kluft quer durch den Nördlichen Theil der Mikra Kaymeni, im Mittel hora 4 (N. 60° 0) streichen: so würde sich hieraus ergeben, dass die Senkung nicht sowohl um einen Punkt herum, als längs einer geraden Linie von der angegebenen Streichrichtung stattgefunden hat. Eine durch die Höhepunkte des Georg und der Aphroëssa gezogene Gerade streicht, in nächster Nähe Südlich gelegen, nur wenig mehr Nordsüdlich. Herr Fouqué, von dessen Briefen ich übrigens bei der ersten Abfassung dieser Stelle noch keine Kenntniss hatte, nimmt daher bekanntlich hier nur eine grosse Spaltung des Bodens an, über welcher alle drei gemeinsam sich befinden sollen. Als ich jene grabenartige Kluft am 4. April besuchte, waren nur noch an ihrem Westende einzelne Wassertümpel in dem Boden vorhanden. Wie erwähnt, fand ich dieselbe circa 10 M. tief. Herr Fouqué glaubt ihre Ränder hätten sich bei unveränderter Bodenhöhe gehoben. Man möchte fragen, ob dieser Behauptung wirkliche Messungen, oder wie es scheint, auch nur eine annähernde Schätzung zu Grunde liegt. Die fast genau parallelen Spalten durch den Neakegel und die Mikra deuten wohl auf eine weitere, wenn auch in ihrer vertikalen Wirkung unmessbare Senkung, Nördlich von der betrachteten Linie.

In der letzten Zeit meiner Anwesenheit war das Niveau des Meeres bei den Badehäusern ganz unzweifelhaft wieder gefallen. Das Maximum dieser zweiten Niveaudifferenz betrug 0,2 Meter. Ich war geneigt, aus derselben auf eine langsame Hebung des Bodens, in seine ursprüngliche Höhe zu schliessen; dem widersprachen aber meine Bootsleute, in dem sie bestimmt behaupteten eine derartige Depression des Seespiegels finde stets bei lange anhaltendem, starken Nordwinde Statt. Genauere Berichte über die spätere Zeit werden erkennen lassen, ob diese Erklärung richtig ist.

Dies Senkungsfeld zeigte mehrere stark erhitzte Stellen. Eine derartige ist hinter dem Nördlichsten Ende des Quai, wo an vielen Stellen hinter demselben, das in kleinen Tümpeln zusammengelaufene Wasser dampft und hinter der Nördlichsten Treppe des Quai eine bis 72° C. heisse Quelle hervorbricht. Ob diese Quelle nur ein Dampfrespiradero

ist oder eine wirkliche Quelle und wenn dies der Fall, was für Wasser sie ausstosse, war leider nicht zu ermitteln, da dieselbe tief hinter dem Gemäuer und unter dem Seespiegel hervorbricht. Eine zweite, stärker erwärmte Stelle ist ganz im Süden des Senkungsfeldes, neben der zertrümmerten katholischen Kapelle. Auch hier sind mehrere Tümpel voll erhitzten, bis 63° warmen Wassers, aus denen einzelne Gasblasen aufsteigen. Leider befinden auch sie sich schon in offener Communication mit dem Meere. Ausserdem sind noch unzählige kleine Spalten vorhanden, in denen eine wärmere Luft circulirt und aus denen zuweilen wohl auch Wasserdampf hervorströmt.

Die Thätigkeit des Kraterkegels der Nea Kaymeni beschränkte sich Anfang April auf einige kleine Fumarolen im Süden des Kraters. Die eine von ihnen liegt genau im Kraterrande, in einem kleinen erdfallartigen Loche. Ein paar andere liegen in analogen Vertiefungen, dem Kraterrande genähert aussen auf dem Kegelmantel. Aus ihnen allen steigt nur wenig und ganz geruchloser Wasserdampf auf. Mehrere Male hatte ich Gelegenheit zu beobachten, wie in den Momenten einer gesteigerten Thätigkeit am Georg, auch die kleinen Fumarolen des Kraterkegels eine bedeutendere Dampfmenge ausströmten. Doch konnte diese Correspondenz nicht immer erkannt werden.

Die Georgspitze bildete bei meiner Ankunft eine mächtige Terrasse von etwas rhomboidalem Umriss, mit einer grösseren Nordwest-Südöstlichen Diagonale von circa 500 Meter. Diese Terrasse steigt am Rande unter einem steileren Winkel, bis zu einer Höhe von etwa 20 Meter aus der Seefläche auf und wölbt sich dann sanft zu einer schwach aufgetriebenen schildartigen Fläche, deren Culminationspunkt circa 50 M. Höhe erreicht. Die ganze Neubildung zeigt nirgends eine glatte Fläche, sondern wird gebildet von einem Haufwerk rauher, oft schneidend scharfer Felsblöcke von verschiedenster Grösse und bald dichter halbglasiger, seltener aber schlackiger Structur. Manche dieser Blöcke liegen so lose und bloss durch ihr zufälliges Gleichgewicht gestützt, dass schon ein Druck mit der Hand hinreicht, um Massen von mehreren Cubikmeter Inhalt umzustossen. Eine regelmässige Anordnung war nirgends zu erkennen,

wenn man davon absehen will, dass um den flachgewölbten Culminationspunkt herum sie sich gern zu kleinen concentrischen Rücken und Kämmen gruppiren. Die Erscheinung des Georg am 6. April von dem südwestlichen Hafenpfeiler der Mikra aus habe ich auf Tafel II darzustellen versucht. Man sieht auf ihr auch links die gesunkenen Häuser und die Dämpfe, welche aus den heissen Tümpeln ausbrechen.

Dieses Trümmerfeld wurde drei Mal von mir erstiegen. Das erste Mal am 30. März, das zweite Mal am 4. April und das dritte Mal am 11. April in Begleitung des Kgl. Preussischen Gesandtschafts-Secretairs Dr. Busch und des Herrn Legationsrath von Staal von der Russischen Gesandtschaft in Constantinopel. Am glücklichsten war ich hierbei am 4. April, indem es mir an diesem Tage gelang, mich dem culminirenden Centralpunkt der vulkanischen Thätigkeit bis auf etwa 100 Meter zu nähern. Ich fand hierbei die Lavablöcke in der Regel kalt, nur in der Nähe unregelmässiger, meist radialer Spalten und einzelner Respiraderos waren sie stark erhitzt. Solche Stellen waren auch bei nur geringer Breite in Folge des hohen Hitzgrades nicht zu überschreiten. Doch fand man bei einigem Suchen gewöhnlich einen Punkt, an welchem die Kluft durch grosse Lavablöcke überbrückt und in Folge hiervon passirbar war. Man musste dies möglichst schnell bewerkstelligen und auch sonst sich möglichst entfernt von den Spalten halten, da in den Momenten gesteigerter Thätigkeit alsdann in der Nähe des Centrums aus ihnen die glühenden Gase mit vernichtender Heftigkeit ausbrachen. Doch war die Beimengung von Chlorwasserstoff und schwefliger Säure keine beträchtliche. Ein Gesetz in der Vertheilung beider vermochte ich nicht zu erkennen. Sehr vorsichtig musste man auch in der Auswahl der zu betretenden Lavatrümmer sein, da diese, ohne es durch ihre Färbung zu verrathen, oft noch glühend heiss waren. Die Lavatrümmerblöcke in der Nähe der Hauptausbruchstelle zeigten nicht mehr ihre gewöhnliche dunkelbraune Färbung, sondern erschienen in den hellen, röthlich weissen Farben, die sie, wie bekannt, in der Nähe heisser Fumarolen durch die Zersetzung und besonders durch die Oxydation des in ihnen enthaltenen Eisenoxyduls anzunehmen pflegen. Uebrigens

konnte ich mich bei dieser Gelegenheit, wie zu anderen Zeiten bei einer Betrachtung von der Höhe der Nea überzeugen, dass eine eigentliche Krateröffnung auf dem Georg nicht vorhanden sei. Die Hauptausbruchsöffnung der Gase und Aschen ist vielmehr ein unregelmässiger, vielfach zerrissener Schlund, der durch die Kreuzung mehrerer Hauptspalten gebildet wird. Ich glaube nicht, dass sein Durchmesser über 7 Meter betrug. Dagegen konnte ich hier, dem Mittelpunkte der Eruption genähert, ein Phaenomen nicht beobachten, das am Rande des Georg häufig und in ausserordentlicher Deutlichkeit wahrzunehmen war. Es ist dies das eigenthümliche Knacken, das man bei allen verhältnissmässig rasch erkaltenden und sich contrahirenden Körpern hören kann. Dasselbe war am Fusse des Georg, zum Beispiel bei der zerstörten Kapelle, ebenso deutlich vor dem Beobachter, als auf dem Rande desselben unter ihm zu hören. An beiden Positionen klang dies Knacken zwar sehr laut und vernehmlich, aber doch gleichzeitig etwas dumpf und nicht von der äusseren Oberfläche der Gesteinsmasse herrührend. Höchst charakteristisch war dabei auch das Klirren der in die neugebildeten Spalten nachfallenden Scherben des halbverglasten Gesteins. Ich kann den Ton bloss mit dem Klirren vergleichen, das entsteht, wenn man Porcellanscherben ausschüttet. Es ist mir dies Phänomen während meines ganzen Aufenthalts immer einer der klarsten Beweise für die noch flüssige und erst allmählich erstarrende Lava im Innern des Georgs gewesen.

Die Veränderungen in der Masse des Georg waren während meiner vierzehntägigen Anwesenheit nur sehr unbedeutend. Für eine Höhenmessung desselben mittelst des Bordaschen Spiegelkreises konnte ich leider keinen recht geeigneten Punkt finden; ich musste daher zu einem anderen, allerdings etwas ursprünglichen Hülfsmittel meine Zuflucht nehmen, um wenigstens eine approximative Höhenbestimmung zu erhalten. Es wurde nämlich mittelst eines Fadens eine lange feine Glasröhre an das Gefäss des in Compassaufhängung befindlichen Reisebarometers horizontal aufgehangen und nun, nachdem natürlich alle Vorsichtsmassregeln gebraucht worden waren, um den Eintritt von Luft in das Barometer zu vermeiden, der südliche Kegelmantel des alten Kraters so weit

erstiegen, bis man sich in gleicher Höhe mit dem höchsten Punkte des Georg befand. Dann wurde das Instrument aufgestellt und der culminirende Felsblock des Géorg in die Röhre eingestellt, die Horizontalität dieser mittelst eines Niveaus noch einmal geprüft und der Barometerstand abgelesen. Dieses Nivellement wurde dreimal vorgenommen und ergab die folgenden Werthe für die Höhe des Georg:

Am 30. März ca.	— 11 h.	52,3 Meter.
7. April	0 h. 15	= 51,89
10. „	— 11 h. 45	= 60,15
Mittel		= 54,78 Meter.

So bedeutende Differenzen müssen wohl in erster Linie auf die ungenügende Methode der Beobachtung geschoben werden und nicht auf das Wachsthum des Berges. Indessen dürfte das Mittel aus den Beobachtungen doch immer einigen Werth haben, um die Höhe in jenem Zeitraume im Allgemeinen zu bestimmen. Das Wachsthum des Georg in horizontaler Richtung war während meiner Anwesenheit zwar an den Punkten, die im Niveau des Meeres durch Winkelmessungen festgelegt werden konnten, unmessbar klein, dass ein solches aber nicht gänzlich fehlte, war um so besser an seinem Oestlichen Rande bei der zerstörten Kapelle zu erkennen. Man konnte hier deutlich wahrnehmen, wie an der Kante der Terrasse fortwährend einzelne Blöcke herabstürzten, während andere dann in der schildförmig gewölbten Fläche von Innen nach Aussen nachgeschoben wurden und bald ebenfalls ihren Vorgängern in die Tiefe nachfolgten. So war bei meiner Ankunft zwischen dem Rande des Georg und der Thüre der Kapelle noch eine ebene Fläche von etwa 8 Meter Breite, auf der nur 2 Blöcke lagen, während bei meiner Abreise man eben noch zur Thür hineingehen konnte. Man wird zweifelhaft sein können, ob die geringe horizontale Vergrösserung, die durch dies Abrollen bewirkt wurde, in der That als ein Wachsthum bezeichnet werden darf, oder nicht. Ein eigentliches Fortschieben der Masse als ein Ganzes konnte ich während meiner Anwesenheit am Georg nicht beobachten.

Von besonderem Interesse ist noch eine Erscheinung, die mit grösster Bestimmtheit erkannt werden konnte und einen weiteren Beweis für die Beweglichkeit der ganzen Masse des Georg und somit für dessen Bestand aus glühend-flüssiger Lava liefert. Es ist dies die Wanderung des culminirenden Punktes auf demselben. Derselbe hat seine Lage während meiner Anwesenheit wiederholt verschoben, leider war jedoch eine Messung der Veränderung unmöglich. Zuletzt war er wieder ganz hinauf an das Nordwestende gewandert und lag diesem wohl drei Mal so nahe, als der Südostspitze. Gleichzeitig fand die Hauptdampfentwickelung an dem Westabhange Statt und Südlich von der grossen Spalte, zwischen Georg und Aphroëssa hatten sich eine Anzahl neuer Fumarolen entwickelt. Diese neue Erhöhung im Westen des Georg war hierbei schon bei einer blossen Betrachtung auffällig und würde, wenn man der oben angeführten Höhenmessung des gleichen Datums (10. April) Vertrauen schenken wollte, auch durch diese bestätigt werden.

Dass die ganze Masse des Georg und ebenso auch der Aphroëssa aber nur ein zäher, im Innern noch flüssiger Lavaerguss war, konnte endlich auch unmittelbar erkannt werden in der Dunkelheit der Nacht. Mit eintretender Dämmerung sah man vom Kegelmantel der Nea aus einzelne der dunkelgrauen den Hauptspalten genäherten Felsblöcke allmählich dunkelroth werden und mit zunehmender Dunkelheit in ein deutliches Rothglühen übergehen. Dann erschienen einzelne flackernde Flammen von mattgelber Farbe hier und dort aus den Spalten und Respiraderos herausschlagend. Bei völliger Nacht sah man dann aber nicht nur deutlich die glühenden Ränder der grösseren Spalten, sondern aus allen Respiraderos, zwischen allen grossen Steinblöcken, schimmerte die noch glühende Masse hindurch. Die Flammen waren jetzt sehr deutlich und an den verschiedensten Stellen, oft ziemlich weit ab von dem Centrum, erkennbar und zeigten nun eine mehr bläulich weisse Färbung, den von der Sonne beschienenen Dampfwolken vergleichbar. Eine Täuschung war hier unmöglich, man sah sie deutlich flackern und zucken, bei jeder Pulsation ihre Grösse und ihr Wallen zunehmen und dann allmählich wieder nachlassen. Dabei war ihre Farbe durchaus abweichend

von der rothen Gluth, die von den Dampfwolken zurückfiel. Ueber ihre Grösse war keine Sicherheit zu gewinnen; ich schätzte sie bis 5 Meter hoch; einzelne konnte man übrigens stets schon von Phira aus, bei 16 maliger Vergrösserung, ganz deutlich unterscheiden. Die Existenz dieses seltenen und früher so viel bestrittenen Phänomens ist bekanntlich von allen wissenschaftlichen Beobachtern der letzten Eruption erkannt und festgestellt worden [1]. Während der nächtlichen Beobachtungen waren die Hauptspalten und der centrale Schlund deutlich zu erkennen und frei von Dampf. Die mit den brennbaren Gasen ausbrechenden Wasserdämpfe waren unmittelbar über der Lava noch nicht so weit condensirt, um die Ansicht zu hindern.

Besonders interessant war aber das freilich nur selten erkennbare eigenthümliche Wallen schwarzer und rothglühender Massen in der Tiefe einiger auf den Beobachter zulaufenden und zum Theil dem Rande ziemlich genäherten Spalten. Hier sah man offenbar den noch flüssigen Lavakern.

Der Georg zeigte an seinem Südrande, wo er aus dem Meere aufragt, so gut wie keine Fumarolen. Um so gewaltiger war aber die Dampfentwickelung an seinem Nordwest- und Nordrande. Wie aus einem Riesenmeiler brechen hier überall die Fumarolen hervor, ziehen die Wölbung hinauf und vereinigen sich zu einer gewaltigen Dampfmasse. Wo sie hervorbrechen sind die Blöcke wieder hellfarbig, auch finden bedeutende Schwefelsublimationen Statt. Besonders ist dies in einer kleinen Einsenkung genau am Nordwestende des Georg und in der Kerbe nach dem alten Kraterkegel zu der Fall. Von hier habe ich selbst mehrere mit zierlichen kleinen Schwefelkrystallen überzuckerte Gesteinsstücke gesammelt. Aus dem Hauptschlunde des Georg entweichen ebenfalls fortwährend Dämpfe, die unmittelbar über ihm durchsichtig sind und erst höher sich zu lichtweissen Wolken condensiren. In diesem Zustande verhältnissmässiger Ruhe hört man nur ein dumpfes Brausen, ähnlich dem entfernten Tosen der Brandung. Von Zeit zu Zeit steigerte

1) Ueber die Natur der ausgestossenen Gase siehe Fouqué Comptes rendus 1867 Bd. 64, S. 184 und Janssen ebenda S. 1303.

sich dann aber die Intensität. Die Dämpfe brechen mit gewaltiger Energie in bedeutenden Massen und dann gewöhnlich aus dem Hauptschlunde hervor. Doch bleibt ihre Farbe stets dieselbe blendend weisse, die sie auch sonst ist. Das Geräusch nimmt bis zu einer furchtbaren Stärke zu. Es ist dann, als ob viele grosse Dampfer gleichzeitig Dampf ausbliesen. Einen tief ergreifenden und wahrhaft erschütternden Eindruck macht es aber, wenn dies Sausen in ein heiseres Pfeifen von ganz unglaublicher Stärke übergeht. Unwillkürlich fürchtet man dann eine Katastrophe. Trotz dem darf man diese Momente gesteigerter Intensität offenbar nicht als Eruptionen dem gewöhnlichen Zustande entgegensetzen, von dem sie sich ja der Art nach durchaus nicht unterscheiden. Auch der Ausdruck Detonation scheint für dergleichen Erscheinungen wenig passend. Es sind das blosse Pulsationen der vulkanischen Thätigkeit, die allmählich anschwillt, ein Maximum erreicht und dann wieder ebenso allmählich abnimmt. Dass diese Pulsationen gelegentlich auch kleine Steine eine kurze Strecke mit in die Höhe reissen, ist wohl natürlich. Die Periode derselben war wenigstens während meiner Anwesenheit eine sehr unregelmässige und ich war leider ausser Stande, durch genaue Notirung ihrer Zeiten das mittlere Intervall zwischen ihnen mit Genauigkeit zu ermitteln, doch dürften 15 m. demselben ziemlich nahe kommen. Aehnliche Pulsationen sind ja von den meisten Vulkanen bekannt und ganz ähnlich auch von mir selbst vielfältig an den Feuerbergen Central-Amerikas beobachtet worden.

Ob bei diesen Pulsationen auch ein eigentliches unterirdisches Donnern vorkommt, habe ich nicht feststellen können. Mehrmals hörte ich in Phira das Schallphänomen deutlich zuerst aus dem Boden heraufkommen, aber das könnte offenbar auch bloss in dem schnelleren Leitungsvermögen des Bodens seinen Grund haben.

Von diesen Pulsationen ist ein anderes Phänomen, das freilich wohl auch nur als das Resultat besonders heftiger Steigerungen anzusehen ist, doch in seiner Erscheinung ganz verschieden. Es sind dies eigentliche Aschenausbrüche, die ich aber leider nur vom 6. April an zu beobachten Gelegenheit hatte. Sie sind ebenfalls begleitet und wer-

den schon vorausverkündet von einem gewaltigen Schallphänomen, das stets unterirdisch zu sein scheint. Es ist ungefähr dieselbe Schallempfindung, die man hat, wenn man einen Eisenbahnzug durch einen Tunnel fahren hört. Der Ton steigert sich continuirlich und fällt dann plözlich ab. Gleichzeitig steigt jäh aus den centralen Spalten eine ungeheuere Dampf- und Aschensäule auf, die aus dichten runden Wolken besteht und von dunkel rauchgrauer Farbe ist. Sie steht einen Augenblick unbeweglich mit scharfen, festen Umrissen; dann löst sie sich allmählich nach Oben in Dampfwolken auf. Das Niederfallen der Asche konnte ich während dieser Eruptionen nie direct beobachten, allein da ich auch sonst Zeuge von kleinen Aschen- und Steinfällen war, die man schon aus einiger Entfernung in der Atmosphäre nicht wahrzunehmen vermochte: so scheint mir schon die dunkele Farbe der Dampfsäule, die sich doch noch später in reinen weissen Wasserdampf auflöst, ein ausreichender Beweis für ihr Vorhandensein. Die Form und die Dimension dieser Aschenauswürfe sind sehr charakteristisch und hatten daher von den Santorinioten auch einen eigenen Namen, nämlich „*κουνουπίδιον*“ Blumenkohl, erhalten. Dieselben stellen einen umgekehrten langsam an Umfang zunehmenden Kegel dar, indem die einzelnen ihn bildenden Wolken unten klein und gedrungen sind, nach Oben aber an Dimensionen zu und an Dichtigkeit abnehmen. Auf Taf. IV habe ich versucht, durch eine Zeichnung diese merkwürdigen Bildungen klarer zu veranschaulichen. Durch einen glücklichen Zufall fügte es sich, dass ich gerade eins der grössten von mir beobachteten Kounoupidien, das am 8. April 5 h. 30 m. aufstieg, mit dem Spiegelkreise, von dem flachen Dache meiner Wohnung aus, messen konnte. Der Winkel, zwischen seiner Basis und der Höhe, in welcher es sich auflöste, wurde hierbei zu 13° 30′ bestimmt. Setzt man die Höhe des Beobachtungspunktes nach meinen Barometermessungen zu 235,56 Meter und die Basis des Dreiecks nach der englischen Seekarte und eigenen Peilungen zu 3390 M. an: so berechnet sich seine Höhe über den Georg zu 815,4 Meter (= 2670′ Engl.). Von diesen Kounoupidien habe ich vom 6. bis 11. April leider überhaupt nur 7 und aus grosser Nähe nur 3 beobachten können. Es ist

daher möglich, dass meine Wahrnehmungen nur Zufälligkeiten und nicht die Regel treffen.

Am Abend des 8. April um 6 Uhr 40 Min. wurde ich, auf dem Dache meiner Wohnung in Phira Siesta haltend, auch noch Zeuge einer anderen äusserst merkwürdigen Eruptionserscheinung. Plötzlich stieg nämlich, begleitet von dem gewöhnlichen Donnern, die Aschen- und Dampfsäule in Form einer gewaltigen Dampfschraube auf. Ihre Farbe war noch dunkeler, als die der gewöhnlichen Kounoupidien. Deutlich konnte ich selbst aus dieser Entfernung mit einem Marineglas von viermaliger Vergrösserung die einzelnen Rauchfäden erkennen, aus denen sich das gewaltige Tau zusammendrehte. Der Nordwind liess die Trombe nicht gerade aufsteigen, sondern neigte sie ein Wenig nach Süden. Das ganze Phänomen dauerte so lange, dass ich Zeit hatte meinen Bordaschen Kreis zur Hand zu nehmen und seine Höhe zu messen. Ich fand den Punkt, in welchem die Schraube sich in gewöhnliche Dampfwolken auflöste, 9° 42′ über der Höhe des Georg, woraus sich bei der Annahme der gleichen Elemente, wie bei dem Kounoupidion, eine Eigenhöhe von 580,7 Meter (= 1900′ Engl.) berechnet. Die ganze Zeit ihrer Dauer war der Fuss der Dampfschraube in den weissen Dampf der randständigen Fumarolen und Respiraderos eingehüllt, die mit kaum gesteigerter Heftigkeit weiter arbeiteten. Auch diese Dampfschraube habe ich versucht auf Taf. IV darzustellen.

Bei einem Abstand von circa 50 Meter von dem Ufer des Georg fand ich das Meer bis 40° c. erhitzt. Doch war diese Temperaturerhöhung keine regelmässige; kältere Stellen finden sich unmittelbar neben wärmeren. Indessen schienen doch einige Striche Wassers im Südwesten des Georg constant sehr stark erwärmt zu sein. Ich musste bei ihnen unwillkührlich an unterseeische Spalten in der neuentstandenen Lava denken.

Spätere Beobachtungen haben diese Ansicht in gewissem Sinne bestätigt. Gerade an der Stelle des stärker erhitzten Wasserstreifens, den ich schon am 18. April 1866 (Nachr. v. d. Kgl. Ges. d. Wissensch. zu Gött. S. 149), aber leider bloss nach dem Augenmass etwas unrichtig

darstellte, erhob sich im Mai ein Theil des Lavastroms, der den Georg bildet, bis über die Seefläche. Derselbe floss daher entweder schon Anfang April noch ganz glühend am Boden des Meeres oder es war damals hier doch schon eine grössere Spalte vorhanden, welche der nachquillenden Lava ihren Weg anwies und das Durchdringen der Erstarrungskruste erleichterte.

Dergleichen stärker erhitzte Wasserstreifen sind leicht an ihrer eigenthümlich trüben milchigen Farbe zu erkennen, so wie auch an den Wasserdämpfen, die über ihnen schweben. Diese steigen meist in unregelmässigen Säulen auf, nicht selten drehen sie sich aber auch zusammen wie Staub und Blätter in einem Wirbelwind, schnüren sich ein und bilden kleine Tromben oder Siphonen, in denen man dann oft noch die einzelnen Dampftheilchen ähnlich den einzelnen Fäden eines Taues herauserkennen, hin und her wallen und spiralig aufsteigen sehen kann. Ich habe mich vergebens bemüht die mittlere Zeitdauer dieser zierlichen Bildungen zu ermitteln und glaube nur behaupten zu können, dass sie alle von kurzer Zeitdauer sind, indem ich keine über 30 Secunden beobachten konnte. Dieselben bilden sich, ohne dass man bestimmte sie erzeugende Ursachen zu erkennen vermöchte. Nie konnte ich während ihrer Dauer ein von ihnen ausgehendes Geräusch bemerken, obgleich wir an einigen in unserem Boot dicht vorüber fuhren. Uebrigens wurden sie besonders häufig in der Nähe, Nördlich und Südlich, der sogenannten Reka beobachtet.

Zu den Eruptionserscheinungen muss man wohl auch die von der Höhe von Phira und bei der Annäherung an die Inseln zunächst in die Augen fallende Färbung des Meeres rechnen. Diese Erscheinung war am einfachsten bei eintretendem Nordwinde; alsdann zog sich aus dem Nordende des kleinen Hafens und der Strasse zwischen der Nea und Mikra Kaymeni ein breiter, gelbrother, an einzelnen Stellen wenigstens sicher von Eisenoxydhydrat gefärbter Streifen in das Meer hinaus nach Süden bis gegen Acrotiri, ähnlich wie er auch auf Tafel I angedeutet ist. Bei geringerem Winde wandte sich diese Farbenzone wohl in einem grossen Bogen wieder rückwärts und weiter gegen Osten und

ich habe sie zum Beispiel am 1. April bis in die Mitte zwischen die Mikra Kaymeni und Thera vordringen sehen. Dabei war stets ihre Grenze gegen Osten eine ausserordentlich scharfe. Am merkwürdigsten muss es aber erscheinen, dass das Meerwasser, dessen mittlere Temperatur ich übereinstimmend mit den einen Monat zuvor angestellten Messungen 17° c. fand, in dieser gelben Zone stets, und so selbst auch am 1. April, plötzlich um ein bis ein und einhalb Grad wärmer wurde und auf 18°, ja 18,5° stieg, hinter derselben und näher an dem Georg aber wieder auf seine mittlere Temperatur zurückging. Eine analogê Erscheinung, deren Ursprung aber wohl in der Aphroëssa zu suchen ist, beobachtete ich am 4. April in der Strasse zwischen der Palaea und der Nea Kaymeni. Es war nämlich die Palaea Kaymeni von einer sehr scharf abgegrenzten grünen Farbenzone umgeben, in welcher das Meerwasser 22°, ja in der Nicolaosbucht 23° zeigte, während es ausserhalb nach der Aphroëssa hin nur 17,6° warm war. Die Ursache dieses Phänomens muss man wohl in den bei andauerndem Nordwinde durch die Strasse zwischen den Kaymeni herabfliessenden Strömungen suchen.

Wie weit schon damals der neue Lavaerguss auch unterseeisch den Boden erhöht hatte, ergiebt sich aus einer Vergleichung der älteren, im Auftrage der Englischen Admiralität ausgeführten Lothungen mit den Ende März von den Officieren der „Nymphe" und am 10. April von mir angestellten Lothungen. Ich habe dieselben auf der beigefügten Karte eingetragen und nach ihnen das natürlich nur ideale Profil des Lavastroms im Anfang des April unter jener construirt. Das Profil, selbstverständlich in gleichem Massstabe der Länge und Höhe gezeichnet, ist gleichzeitig interessant für eine Veranschaulichung der Böschung, ebensowohl des Bodens, über welchen der Lavastrom floss, als auch der neu durch ihn gebildeten Oberfläche.

Aphroëssa, das jüngere Kind der neuen Eruption, bildete einen sanft glockenförmig gewölbten Hügel von etwas eirundem Umriss, der sich am anschaulichsten durch den Vergleich mit einem riesenhaften Maulwurfshügel machen lässt, im Südwesten wird sie von einem langgezogenen, von Nordwesten nach Südosten streichenden Trümmerkamm ge-

bildet. Das ist die damals nur noch in ihren äussersten Punkten getrennte, sogenannte Reka.

Die Aphroëssa besteht wie der Georg aus lauter einzelnen Blöcken, dieselben sind jedoch weniger dicht und glasartig, nicht selten etwas cavernös, ja zuweilen an ihrer Oberfläche fast schaumig. Sie ragen nirgends in so scharfkantigen, massigen Blöcken auf wie am Georg. Dagegen war an der Aphroëssa die ganze Masse viel deutlicher in Bewegung als dort. Fast ununterbrochen hörte man hier das helle, an fallende Glasscherben erinnernde Klirren und Knirschen der fallenden und nachgeschobenen Gesteinsblöcke. Nicht selten sah man auch grosse Blöcke und ganze Blockzüge die sanft geneigte Böschung sich hinabschieben. Diese Verhältnisse nöthigten mich auch die zwei Versuche, die ich am 10. April zur Besteigung der Aphroëssa machte, bald wieder aufzugeben. Ein eigentlicher Krater ist auf ihr eben so wenig vorhanden als an dem Georg. Auf der Aphroëssa fehlt aber selbst jeder Hauptschlund und alle grossen Hauptspalten. Die Gase entweichen hier aus unzähligen kleinen Klüften und Respiraderos zwischen den einzelnen Lavablöcken.

Das durch die stete Bewegung in der Oberfläche angedeutete continuirliche Nachquellen der Aphroëssa-Lava konnte auch durch wiederholte Messungen bestätigt werden. Es wurden nämlich die Winkel zwischen dem Nordwestlichsten und Südöstlichsten, aus dem Meere aufragenden Lavablocke (= Länge) und ebenso die Winkel zwischen der höchsten Wölbung und der Seefläche (= Höhe) von dem Nordwestlichen Ufer der Stationsklippe aus fünfmal mit einem Bordaschen Spiegelkreise gemessen. Die mit einem vorgesetzten ! bezeichneten Messungen sind gut, die nicht angezeichneten aber in Folge der stärkeren Dampfentwicklung und der daher weniger scharfen Einstellungen weniger genau.

Diese Messungen ergaben:

Datum.	Stunde.	Länge.	Mittel aus Messungen.	Höhe.	Mittel aus Messungen.
März 30.	2	! 26° 15′ 40″	II	! 2° 35′ 10″	I
April 1.	3	! 28 2 10	II	! 2 33 23	III
„ 4.	4	! 31 13 46	III	! 2 49 40	III

Datum.	Stunde.	Länge.	Mittel aus	Höhe.	Mittel aus
April 7.	2	32° 29′ 40″	I	2° 47′ 30″	II
„ 10.	2		0	! 2 54 30	II
			Messungen.		Messungen.

Nimmt man nun, um für diese Messungen absolute Werthe zu erhalten, den Abstand der Aphroëssa-Höhe von dem Nordende der Stationsklippe nach der englischen Seekarte, nach der Karte von Fritsch, Reiss und Stübel und nach eigenen Peilungen zu 850 Meter an und für die Linie durch die beiden äussersten supramarinen Felsblöcke N. 55° W. als constantes Streichen, so findet man:

Datum.	Die Länge.	Die Höhe.
am März 30.	423,45 Meter.	38,39 Meter.
„ April 1.	455,05 „	37,95 „
„ „ 4.	502,95 „	41,89 „
„ „ 7.	537,25 „	41,44 „
„ „ 10.		43,18 „

Aus diesen Messungen und den berechneten Näherungswerthen erkennt man, dass die Aphroëssa vom 30. März bis zum 10. April sowohl an Umfang als auch an Höhe beträchtlich zunahm. Es ergiebt sich ferner, dass dieses Wachsthum zu verschiedenen Zeitpunkten ein verschiedenes war, und endlich, dass der Lavaerguss nicht nach beiden Richtungen im gleichen Verhältniss zunahm. Die Beobachtung einer Zunahme in der horizontalen Richtung, bei einer Abnahme in der verticalen ist wohl ein anderer unwiderlegbarer Beweis dafür, dass die Aphroëssa, wie der Georg, nur durch den Erguss einer noch glühend-flüssigen Lava gebildet worden ist.

Eine Wanderung der höchsten Wölbung der Aphroëssa fand während jener Zeit, wie wohl überhaupt, nicht statt.

Ihre allgemeine Erscheinung giebt Taf. III wieder. Die im Innern noch glühenden Massen kann man in der Nacht an der Aphroëssa ebenso gut erkennen als an dem Georg und zwar übertrifft die Aphroëssa

an Grossartigkeit noch den Georg. Bis zur halben Tiefe sieht man überall zwischen den erkalteten Blöcken den glühenden Kern durchschimmern. Die ganze zimmtbraune Dampfsäule erscheint dann als ein grossartiger gluthrother Feuerschein und überall zucken aus den Respiraderos Flammen hervor, die an Grösse die des Georg noch übertreffen. Dieselben sind jedoch etwas verschieden durch einen Stich in das Carminrothe und Bläuliche.

Die Dampfentwickelung an der Aphroëssa war im Ganzen viel unbedeutender als am Georg. Sie fand besonders an der Südost- und Nordwest-Spitze der sogenannten Reka und in den Einschnitten zwischen ihr und der eigentlichen Aphroëssa statt. Um so merkwürdiger ist die Rauchsäule, die sich von ihrer Höhe erhebt. Diese ist nicht weiss, wie die übrigen Fumarolen, sondern, durch Eisenchlorid gefärbt, licht-rost- bis zimmtbraun, sie steigt gerade und durchscheinend bis durchsichtig auf, ohne sich zu kräuseln oder Wolken zu bilden und mag etwa 50 Meter hoch sein.

Pulsationen sind in ihr kaum wahrnehmbar, wenn gleich dieselben auch an der Aphroëssa nicht fehlen und hier ebenfalls durch ihre Schallphänomene sich kennzeichnen, welche jedoch etwas abweichend von denen des Georg sind. Ich habe wenigstens eben so wenig das pfeifende Sausen als das polternde Rasseln hören können, sondern stets nur ein dumpfes, aber eigenthümlich klirrendes, unterirdisches Donnern. Diese Pulsationen sind dabei weit seltener als am Georg. Nur einige Male beobachtete ich eine völlige oder fast völlige Gleichzeitigkeit in den Schallphänomenen beider. Da dieselben aber sonst ganz unabhängig von einander eintraten, so machten auch diese beobachteten Fälle einer Uebereinstimmung auf mich nur den Eindruck des Zufälligen.

Kounoupidien konnten an der Aphroëssa nicht beobachtet werden und sind wohl überhaupt nicht an ihr vorgekommen. Ja auch während der Kounoupidien des Georg war an der Aphroëssa keinerlei Steigerung der Intensität zu bemerken. Dagegen war ich, wie früher J. Schmidt, Zeuge einer Stein-Eruption. Dieselbe fand am Abend des 8. April um 10 Uhr Statt. Da die Nacht sehr dunkel war, so konnte man nur eine ungewöhnlich starke Dampfentwickelung und die ausgestossenen glühenden Steine erkennen, die von Phira aus gesehen wie Funken durch

die Luft fuhren und dann in das Meer stürzten. Ihre Curven waren zwar nur kurz, aber ihre Zahl eine so bedeutende, dass ich diesen Steinausbruch nicht mehr als vierten Ranges bezeichnen möchte. Die Schallerscheinung war bei dieser Gelegenheit nicht bedeutender als gewöhnlich. Georg steigerte seine Thätigkeit unterdessen nicht.

Der besonders häufig aber regellos an dem Nordwest- und Südostende der Aphroëssa über das Meer hinziehenden zierlichen Dampfsiphonen wurde schon oben gedacht. An beiden Punkten war das Meer stets stärker erhitzt. Der Wärmegrad war aber hier wie auch sonst rings um die Aphroëssa sehr schwankend und bei etwa 50 Meter Abstand bald nur 22°, bald 40°. Diese Temperaturveränderungen wurden zum grösseren Theile sicher nur durch die Richtung und Stärke des Windes und der durch ihn veranlassten Strömungen bewirkt. Einzelne hatten aber offenbar eine innere vulkanische Ursache, so zum Beispiel die mit zahllos aufsteigenden Gasblasen verbundene Temperatursteigerung auf 40 bis 46°, die am 10. April Nordwestlich von dem St. Georgioshafen beobachtet wurde. Leider war gerade bei dieser einzigen Gelegenheit Gase zu sammeln, die sich während meines Aufenthaltes bot, mein Apparat durch eine Nachlässigkeit meines Dragoman nicht mit im Boote. Südlich von dem alten Lavafeld der Nea zwischen Georg und Aphroëssa zeigte das Meer stets seine normale Temperatur von 17°.

Wie weit sich schon damals auch die Aphroëssa unterseeisch ergossen hatte, ergiebt sich aus den in die Karte eingetragenen Sondirungen und dem nach diesen Lothungen construirten Profile unter der Karte. Man erkennt, dass schon damals das steil abfallende Thal zwischen der Palaea und Nea bis über seine halbe Höhe von der Lava ausgefüllt war und dass die vertikale Aufstauung der Lava im Verhältniss zu ihrer horizontalen Verbreitung in der That nur eine geringe ist.

Um eine Uebersicht über das allmähliche Anwachsen des Lavaergusses während der früheren Zeiten der Eruption zu geben, habe ich in die Karte nicht nur nach den vorhandenen Publicationen und an Ort und Stelle eingezogenen Mittheilungen eine ungefähre Darstellung des Standes der Eruption am 20. Februar eingetragen, sondern auch eine

vergrösserte Copie der schönen Karte von Fritsch, Reiss und Stübel hinzugefügt, ihre Lothungen eingetragen und nach diesen und den bezüglichen Höhenmessungen für Ende Mai das ideale Profil des Lavastroms construirt. Die hinter der Durchschnittsebene gelegenen Maiinseln sind, parallel geschnitten, in dem Profil der Aphroëssa mit punktirtem Umrisse dahinter gezeichnet. Die an ihnen beobachtete Wanderung von Nordwest nach Südost beweist deutlich, wie Fritsch, Reiss und Stübel mit Recht hervorheben, dass auch die Aphroëssa nur ein Lavaerguss und jene Inseln nur die aus einem noch langsam fliessenden Theile dieses Ergusses hervorragenden Erstarrungskrustenspitzen sind. Dass die auf ihnen angeheftet gefundenen Meeresthiere dem nicht widersprechen, hat W. Reiss schon am 2. Juni 1866 (Siehe Jahrb. d. k. k. geol. Reichsanst. Verh. S. 106) hervorgehoben. Auch die Verschiebung des Rekakamms, die sich aus dem Profil gut erkennen lässt, zeigt, dass vom Anfang April bis Ende Mai die Aphroëssa nicht in der Weise gewachsen war, wie es ein aus dem Meere aufsteigendes, starres Stück Boden hätte thun müssen, sondern dass sie in Folge des innern, zähflüssigen Zustandes aufquoll, das Verhältniss ihrer Theile gegen einander veränderte und sich nach dem Abhang des alten Neagrundes hin fortschob.

An dem Profile des Georg sieht man gut, welche gewaltige Masse von Lava von Anfang April bis Ende Mai hier nachquoll, kann aber in ihm weder das in der Karte erkennbare, so ungleichartige Wachsthum und den nach Süden durchgebrochenen Lava-Ausläufer, noch auch eine Verschiebung in dem culminirenden Punkte erkennen. Eine solche haben aber nicht nur Fritsch, Reiss und Stübel in ihrer Karte verzeichnet, sondern sie wird auch von Herrn Fouqué (Comptes Rendus 1866, Tom. 63, pag. 1187) ausdrücklich constatirt. Die bei meiner Abreise im äussersten Nordwesten gelegene Spitze war im Anfang Mai weit nach Südosten gerückt, um dann bis Ende Mai wieder nach Nordwesten zu wandern. Dass damals schon ein wirkliches Kraterbecken auf dem Georg vorhanden war, wie Herr Fouqué behauptet (a. a. O.), ist mir unwahrscheinlich. Das schöne Relief von Stübel zeigt keins. Der Text zu den Kaymeni-Inseln giebt darüber keine Auskunft.

Ueber die Phasen der Eruption nach dem Mai 1866 liegt nur wenig Material vor. Im Juli nnd August 1866 sollen mehrere stärkere Explosionen und sogar Erderschütterungen stattgefunden haben. Ende Februar 1867 fand Herr Fouqné die Eruption noch in voller Thätigkeit. Der Georg hatte 108 Meter Höhe erreicht und die noch immer langsam nachquellende Lava hatte sich wieder weiter verbreitet. Leider ist Herrn Fouqué's ganze Darstellnng der Eruption nicht so vorurtheilsfrei und präcis, dass man sich nach seinen Angaben ohne Autopsie ein völlig klares Bild von dem damaligen Zustande machen könnte. Auch im Spätsommer 1867 hatte nach Zeitungsnachrichten die Eruption noch nicht geendet.

Das Material, welches in der Eruption von 1866 aus dem Inneren der Erde hervordrang, ist nicht nur in Georg und Aphroëssa das nämliche, sondern es stimmt auch völlig überein mit dem herrschenden Gestein der älteren Laven Santorins. Das gilt nicht nur von der physikalischen Ausbildung, sondern auch von der chemischen Zusammensetzung, wie eine Vergleichung der vorhandenen Analysen [1]) deutlich ausweist. Die von den beiden Neubildungen und den älteren Laven vorhandenen, nicht auf die Analyse selbst zurückführbaren Verschiedenheiten und Schwankungen sind in der That sehr gering. Nur die eine schon oben angeführte Analyse K. v. Hauer's zeigt ein beträchtlich (um circa 11% S i) basischeres, wenn auch sonst ganz analog zusammengesetztes Gestein. Das Anorthitgestein, wie es von den Maiinseln bekannt geworden, ist nur als Einschluss vorhanden. Auch mineralogisch besteht die innigste Verwandtschaft. Den Feldspath des neuen Gesteins vergleicht Terreil (Comptes rendus 1866 Tom. 62, S. 1401) nach seiner Analyse desselben

1) Von der Lava von 1866 sind mir 11 Analysen bekannt geworden: 2 von Habermann (Sitzber. Wien. Acad. 1866 S. 450), 3 von Christomanos (ebenda S. 452), 5 von K. von Hauer (Jahrb. d. k. k. geol. Reichsanst. Verh. S. 68 und S. 191) und 1 von Terreil (Comptes rendus 1866 Tom. 62 S. 1399).

Von den älteren Laven kenne ich nur 7 Analysen, 1 von Abich und 1 von Elsner (cf. Roth Gesteinsanalysen S. 11, Nr. 17 und S. 12, Nr. 18) und 5 von K. v. Hauer (Jahrb. d. k. k. geol. Reichsanst. 1866 Verh. S. 79 und 80).

zunächst mit Albit. Der Sauerstoffquotient stimmt dazu recht gut, er ist = 0,331, also nur 0,002 höher als der des Albit und Orthoklas. Aber der Sauerstoff der Monoxyde verhält sich zu dem der Thonerde und der Kieselsäure = 1 : 2,55 : 9.89 = 1, 3 : 3 : 13,0. Das ist wenig befriedigend. Die Alkalien, die nur aus dem Verlust bestimmt worden, sind nicht geschieden und es scheint fast, dass der vorwiegende Natrongehalt nur aus der Bauschanalyse des Gesteins geschlossen wird. Zu Albit, ebenso wie zu Orthoklas stimmt auch nur wenig der Gehalt von 4,73% $\dot{C}a$. Terreils Analyse giebt daher keine Sicherheit über die Natur des Feldspaths in der neuen Lava. Zirkel erklärt in Folge seiner mikroskopischen Studien bestimmt, dass Sanidin vorhanden sei, erwähnt jedoch daneben auch einzelner trikliner Feldspäthe. Danach wäre das Gestein, wie auch Stache will, Sanidin-Oligoklas-Trachyt. Ich habe an allen zahlreichen Feldspathkryställchen, die ich untersuchte, deutliche Zwillingsstreifen gefunden, allerdings zum Theil erst bei ziemlich starker Vergrösserung und sehr scharfem Lichte. Das ist natürlich noch kein strenger Gegenbeweis, indessen wäre es doch sehr merkwürdig, wenn ich immer gerade nur Oligoklas getroffen hätte. Dünnschliffe wurden übrigens nicht beobachtet. Auch das Verhältniss des Natrons zu dem Kali in den Bauschanalysen stimmt nur wenig mit den Verhältnissen in den vorliegenden Analysen von Sanidin-Oligoklas-Trachyten. Die 8 Analysen der neuen Lava, welche die beiden Alkalien geschieden haben, ergeben im Mittel 4,83% $\dot{N}a$ auf 1,70 $\dot{K}$; das ist ein noch stärkeres Uebergewicht des Natrons, als es Zirkels Analyse des Kelberger Sanidin-Oligoklas-Trachyts (4,29 : 2,01) nachgewiesen hat, und weit abstehend von dem sonst gefundenen Verhältnisse, das 5 : 4 sehr nahe kommt. Auch der Kalkgehalt (3,41%) ist ein auffällig hoher, wenn man bedenkt, dass der echte Sanidin-Oligoklas-Trachyt in der Regel ziemlich zahlreiche Hornblende und (oder) wohl ebenfalls kalkhaltigen Magnesiaglimmer enthält, während in der neuen Santorinlava der augitische Bestandtheil kaum erkannt werden kann. Der Hornblende- und Glimmer-freie Sanidin-Oligoklas-Trachyt vom Kühlsbrunnen enthält bekanntlich auch nur sehr wenig (nach Bischof 0,49%, nach Bothe 1,29%)

Kalk, ja selbst der Trachyt der Hohenburg bei Berkum hat nur 0,22% Ċa gegeben (S. Dechen Siebengebirge S. 88). Wenn auch ferner aus dem schwankenden Verhältnisse der Alkalien zum Kalk in dem Oligoklase nichts mit Sicherheit geschlossen werden kann, so sollte man, bei dem völligen Zurücktreten des augitischen Gemengtheils, im Falle der gleichzeitigen Anwesenheit von dem so kalkarmen Sanidin, doch ein Verhältniss des Kalks zum Alkali in dem Gesteine wenigstens als wahrscheinlich erwarten, welches mehr Alkali als das von Rammelsberg als normal angesetzte von 1 Kalk auf 2 Natron ergiebt. Das ist aber nicht der Fall, dasMittel der nämlichen 8 Analysen wie oben giebt 1 Kalk auf 1,6 Alkali (12,1 : 19,1), also gerade umgekehrt weniger Alkali, als die normale Constitution des Oligoklases und die Kalkarmuth des Sanidins erwarten lässt. Hierbei ist übrigens die Magnesia noch ganz auf den nicht selten erkennbaren Olivin gerechnet worden. Aber auch das nachweisbare, ziemlich häufige Auftreten von Olivin, der, wenn ich nicht irre, bisher noch nicht in Sanidin-Oligoklas-Trachyten gefunden worden ist, die gänzliche Abwesenheit von Glimmer und die nur ein Mal von Zepharovich beobachtete Hornblende, sowie endlich die ganze äussere Erscheinungsweise passen weit besser zu einem (Augit-)Andesite, als zu einem Sanidin-Oligoklas-Trachyte. Auch die völlige Uebereinstimmung der chemischen Analyse mit den älteren wohl zweifellosen Augit-Andesiten deuten darauf hin. Sanidin könnte wohl nur als unwesentlicher Gemengtheil vorhanden sein.

Neben dem Oligoklase fallen zunächst die zahlreichen Magneteisenkryställchen auf, deren scharf begrenzte Octaederflächen, besonders bei Lampenlicht, durch ihren starken metallischen Glanz hervorleuchten. Nicht so häufig, aber doch noch oft genug mit Sicherheit zu erkennen, ist Olivin in kleinen Körnern von der charakteristischen Färbung. Ausserdem wurde noch in einigen seltenen Fällen ein dunkler-grünes, säulenförmig krystallisirtes Mineral bemerkt, das nicht mit Sicherheit bestimmt werden konnte, aber Augit zu sein schien. Das gänzliche Zurücktreten des Augits in manchen Varietäten der Augit-Andesite wurde schon oben in der Lava der Mikra erkannt und ist auch an manchen

Central-Amerikanischen Gesteinen bemerkt worden. Bei der innigen chemischen und geologischen Zusammengehörigkeit solcher Gesteine mit typischen Augit-Andesiten muss man dieselben mindestens unmittelbar neben die Augit-Andesite stellen.

Eine Berechnung der vorhandenen Analysen nach dieser mineralogischen Zusammensetzung wäre, so gut sich dieselben ihr auch in mancher Beziehung fügen würden, doch immer noch mit zu vielen willkührlichen Annahmen behaftet, um ein auch nur einigermassen zuverlässiges Resultat zu ergeben. Mit Sicherheit könnte nur erkannt werden, dass die neue Lava im Mittel wenigstens 16,3% überschüssige Kieselsäure enthält. Sie ist also ebenfalls ein quarzführender Augit-Andesit oder, wie man bei dem noch nicht im Gestein selbst ausgeschieden beobachteten Quarz strenger sagen sollte, ein Augit-Andesit mit überschüssiger Kieselsäure (Andesit-Rhyolith).

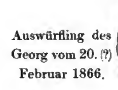
Die interessante mikroskopische Structur der neuen Lava hat Zirkel ausführlich beschrieben. Dem unbewaffneten Auge erscheint die Grundmasse bald ausgezeichnet halbverglast und obsidianartig, bald mehr felsitisch. Nicht selten sind die Fragmente, in welche die Lava zerfallen ist, äusserlich halbglasig, aber, zerschlagen, in ihrem Innern mehr felsitisch. Ihre Farbe ist pechschwarz, bis ziemlich hell chokoladenbraun. Die am meisten obsidianartigen Varietäten scheinen auch die dunkelsten, in feinen Blättchen graulich durchscheinenden bis durchsichtigen zu sein. Diese Grundmasse ist in der Regel nur sehr feinporig und „trachytisch", zuweilen fast dicht. Doch finden sich in ihr nicht selten neben den feinen Poren auch einzelne etwas grössere schlackige Hohlräume. Manche Blöcke, besonders an der Reka, sind äusserlich und zuweilen auch im Innern stellenweise sehr ausgezeichnet schlackig. Die kleinen, 1—3 Millimeter grossen, triklinen Feldspäthe liegen in dieser Grundmasse ganz regellos verstreut. Durch ihre weisse Farbe heben sie sich von der Grundmasse ab und geben dem Gestein ein ausgezeichnet porphyrisches, sehr an manche Porphyrite und Melaphyre erinnerndes Aussehen. Die anderen Gemengtheile entdeckt man erst bei sorgfältigerer Untersuchung mit der Loupe. Auch in der neuen Lava ist

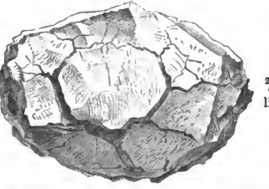
der Feldspath oftmals mit dem Olivin (und Augit?) verwachsen und um ihn herum auskrystallisirt.

Besonders die obsidianartigen Laven sind äusserst spröde. Ein Schlag mit dem Hammer auf die Kante oder Ecke eines Blocks genügt nicht selten, um ihn in unregelmässige polyedrische Stücke zu zersprengen. Sie erinnerten mich an den bekannten Damourschen Obsidian.

Nach ihrem Vorkommen an verschiedenen Punkten am Kegel der Nea und nach den Mittheilungen von Christomanos war ich anfänglich geneigt der Eruption von 1866 auch einzelne Blöcke einer grauen, plattigen, in abwechselnden Lagen dichten und dann dunkelgrauen, sowie durch deprimirte Hohlräume porösen und hier hellgrauen Lava zuzuschreiben. Ziemlich unglücklich war die Bezeichnung, die ich früher einmal für sie gebraucht habe, dass sie nämlich ein Phonolith-ähnliches Gestein sei. Wenn man von der plattigen Structur absieht, erinnert das Gestein in seiner äusseren Erscheinung noch am meisten an die dichteren Varietäten der Volviclava; aber es ist nur ein Augit-Andesit. In ihm erkennt man auch deutlich den lauchgrünen Augit. Bei der abweichenden Entwickelung dieses Gesteins ist mir aber seine Zugehörigkeit zu den Eruptionsmassen von 1866 jetzt zweifelhaft geworden.

Sehr eigenthümlich und interessant sind die Lavamassen, welche der Georg in der zweiten Hälfte des Februar ausgeworfen hat. Dieselben finden sich auf der Nea und auf der ganzen Mikra, fehlen aber auf der Palaea, wie der von Jul. Schmidt und Palaska gemessene Verbreitungsbezirk von 1 Kilometer Radius verlangt. Sie sind am grössten natürlich in der unmittelbaren Nähe des Georg, wo ich einzelne Auswürflinge auf 6 Cubikmeter schätzte, aber auch auf der Ostseite der Mikra fand ich noch einen derselben, der nur wenig unter 0,6 Meter Durchmesser hatte. In unabsehbarer Menge, wenn auch meist nur von kleineren Dimensionen, liegen sie aber auf und an dem Kegel der Nea. Trotz ihrer manchfachen, bald rundlichen, bald sehr unregelmässig polyedrischen Form und der wechselnden Grösse kann man sie doch alle leicht wiedererkennen, besonders an den eigenthümlichen Rissen und Sprüngen, die sie zeigen.





Auswürfling des Georg vom 20. (?) Februar 1866.

$^2/_3$ der natürlichen Grösse.

Der vorstehende Holzschnitt, die getreue Copie eines kleinen von mir mitgebrachten und im hiesigen geologischen Museum niedergelegten Auswürflings giebt die gewöhnliche Beschaffenheit und die eigenthümliche Aufberstung derselben gut wieder. An durchgeschlagenen Exemplaren sieht man, dass sie einen lockeren porösen Kern bei einer dichten glänzenden Rinde haben. Es sind wahre Lavabrode. Die Krume ist ein feinschaumiger Bimstein, in dessen halbglasiger, nur mässig aufgelockerter Grundmasse ziemlich zahlreiche trikline Feldspäthe ausgeschieden sind. Nach dem Rande hin ist die Masse weniger aufgelockert und daher dunkeler und auch dem blossen Auge als obsidianartig erkennbar. Die äussere Rinde bildet eine scheinbar dichte, erst unter der Loupe feine Poren zeigende Obsidianmasse mit zahlreich ausgeschiedenen triklinen Feldspäthen. Sie besteht oft aus mehreren ziemlich dünnen und durch lichtere Streifen scharf abgeschnittenen, concentrischen Schalen. Die ganzen Auswürflinge sind äusserst spröde, man braucht sie nur auf den Boden fallen zu lassen, um sie in zahlreiche Stücke zerspringen zu sehen. Ja sie sind gegen Stösse so empfindlich, dass von den grösseren Bomben, die ich mitbrachte, nur eine einzige nicht zersprungen hier ankam.

Die Entstehung dieser Lavabrode ist einfach. In dem Moment, in welchem die glühendflüssige Lava ausgeworfen wird, beginnt sie unter dem geringeren Druck aufzuschäumen und in Bimstein überzugehen. Gleichzeitig erstarrt aber ihre Rinde jäh zu einer dichten obsidianartigen

Masse, die sich nun zu contrahiren anfängt, während der innere, noch glühende Kern noch weiter aufschäumt und sein Volumen noch wirklich vergrössert oder doch zu vergrössern strebt. So müssen sich Risse und aufgeborstene Stellen in der Rinde bilden, während die einzelnen Theile des ganzen Lavabrods in ähnlicher Weise in einer Art labilen Gleichgewichts sich befinden, wie in den bekannten Glastropfen. Interessant scheint noch, dass die Rinde zuweilen aus einzelnen concentrischen Schalen besteht, deren hellere Zwischenlagen nur durch völlig flachgedrückte und in einander verlaufende Zellräume gebildet zu werden scheinen. Jedenfalls ist diese Plattung aber nur durch die successive Erstarrung und die mit dieser verbundene Contraction der Lava entstanden. Einzelne Lavabrode zeigen durch ihre ganze Masse Parallelstructur; hellere, lockere und dunkelere, dichtere Lagen wechseln mit einander ab. Hier hat man es wohl mit den Resultaten eines präexistirenden Structurverhältnisses zu thun. Manche Lavabrode sind bei ihrem Niederfallen zersprungen. Ihre Bruchstücke zeigen dann nur stellenweise oder auch gar nicht die dichte schwarze Aussenrinde, sind aber, wie zu erwarten war, immer noch in ganz gleicher Weise, wie die ganzen, aufgeborsten.

Zu erwähnen sind schliesslich noch die ziemlich zahlreichen Einschlüsse, welche auch die Eruption von 1866 mit aus der Tiefe heraufbrachte. Ich kannte dieselben während meines Aufenthalts auf Santorin bloss von dem Georg. K. v. Fritsch, Reiss und Stübel fanden sie aber auch an der Aphroëssa und selbst auf den Maiinseln (S. Reiss in Jahrb. der k. k. geol. Reichsanst. 1866 Verh. S. 106). Ein solcher Einschluss ist auch nur das von G. Stache und K. v. Hauer untersuchte Anorthitgestein der Maionisi, wie ersterer ganz richtig erkannte, und wie mir auf meine Vermuthung und Anfrage K. v. Fritsch ausdrücklich bestätigte. Ich kenne diese Einschlüsse vom Georg in vier verschiedenen Ausbildungsweisen. Einmal ist er ein völlig dichter Brocken, der scharf von der umgebenden Lava, mit der er nirgends verwachsen, abgegrenzt ist. Der Einschluss ist rauchgrau und ganz ähnlich körnigem Kalke. Erst unter der Loupe erkennt man, dass man es mit einem Gemenge verschiedener, noch unbestimmter Mineralien zu thun hat. Dieser Ein-

schluss schwitzte angefeuchtet Chlornatrium aus, die umschliessende Lava aber nicht. Das andere Mal ist der Einschluss eine poröse Schlacke, die schon mit der umgebenden Lava verwachsen ist. Die Anorthite liegen mit zahlreichem, gelblichem Olivin zusammen nur in der Grundmasse; die Hohlräume sind meist rundlich und ihre Wände wenig rauh; sie sind leer, nur selten finden sich in ihnen kleine rings auskrystallisirte Anorthite. Im dritten Falle ist der Einschluss eine durchweg aufgelockerte grünlich-graue Masse, die unter der Loupe als ein Haufwerk von zierlichen Anorthitkrystallen mit dunkelgrünem Augit und kleinen gelben Titaniten sich ausweist. Diese Masse ist durch eine dichtere „grünlich braune Rinde“ von felsitischer Beschaffenheit mit der umgebenden halbglasigen Lavamasse verwachsen. Endlich ist viertens der Einschluss hohl; er ist eine Art Druse, deren Rinde ähnlich der Masse der letzten zwei Einschlussarten ist, die aber nur eine geringe Dicke hat, und auf der viele dunkelgrüne Augite, Anorthit- und Titanitkrystalle aufsitzen. Es ist dies eine Art von Einschluss, die leicht Täuschungen veranlassen und für eine blosse Ausscheidung gehalten werden kann. Doch ist die Rinde stets leicht von der umgebenden Lava, mit der sie nicht einmal verwachsen zu sein pflegt, zu unterscheiden. In den Lavabroden habe ich nur ein Mal einen fremdartigen centralen Kern beobachtet. Es ist dies ein circa 20 Millimeter im Durchmesser haltender poröser gelblich und grünlich weisser Kernbrocken, der unter der Loupe zahllose kleine Wollastonitnädelchen erkennen lässt.

5. Allgemeine Schlussfolgerungen.

Die vulkanischen Neubildungen des Jahres 1866, Georg und Aphroëssa, sind nur das Resultat eines langsam nachquillenden, zähflüssigen Lavaergusses. Dieser Erguss begann ziemlich sicher ohne Erderschütterungen, sicher aber ohne jede Hebung des früher schon vorhandenen Bodens. Es fand im Gegentheil nach der Ausbruchstelle hin eine Senkung Statt, deren Ursache (Abschmelzung?) jedoch nicht bestimmt werden kann. Nach den durch den Anfang des Lavaergusses erzeugten Spalten zu schliessen, fand diese Senkung nicht um einen Punkt herum

Statt, sondern, so weit man dies bei solchen Erscheinungen erwarten kann, parallel einer geraden Linie, welche durch die 3 Kaymeni-Inseln gezogen werden kann und die ihrerseits wieder kaum 20° abweicht von der Axe der Querreihung Columbo-Santorin-Christiani. Die neue Lava brach (fast genau) parallel den erzeugten Spalten und daher auch parallel der Senkungsaxe nur wenig weiter nach Südosten und, wie wenigstens wahrscheinlich ist, in der Senkungsaxe selbst an zwei Punkten hervor. Dass der Lavaerguss an diesen beiden Punkten (Georg und Aphroëssa) gleichzeitig erfolgte, ist zwar nicht streng zu beweisen, aber mindestens sehr wahrscheinlich. Das Material des neuen Ergusses ist an beiden Punkten absolut identisch und da die Erfahrungen im Anfange der Eruption von 1866, ebenso wie diejenigen, die aus dem Jahre 1707 vorliegen, erkennen lassen, dass ein derartiger Lavastrom bereits einige Zeit am Boden des Meeres sich fortschieben kann, ohne doch irgend eine supramarine Eruptionserscheinung zu bedingen: so lässt sich der geringe Zeitunterschied (15 Tage) in dem Auftauchen beider Eruptionsmassen leicht durch die steilere Böschung des Meeresbodens in der Gegend der Aphroëssa erklären. Der nur 8° geneigte Meeresboden bei Georg bewirkte sofort Stauungen, die supramarin wurden, während die Aphroëssa auf einer schiefen Fläche von circa 25° Böschung erst den tiefen Meeresarm zwischen Nea und Palaea beträchtlich aufhöhte, ehe ihre Massen sich über die Seefläche erhoben. Reka ist von Aphroëssa nicht zu trennen und auch die Maionisi sind, wie schon erwähnt, nur später aufgetauchte Schollen des nämlichen Lavastroms. Aus dem unter der Karte angegebenen Profil der Aphroëssa erkennt man, dass die Lava wiederholt auch ihrerseits wieder Böschungen von 28° Neigung bildete. Das Wachsthum der Aphroëssa und des Georg fand in verschiedener Weise Statt. Wenn die nachquillende Lava innerhalb ihrer Erstarrungskruste in die Höhe steigt und diese dabei auch in horizontaler Richtung etwas auseinander treibt, wie das während meiner Anwesenheit an der Aphroëssa-Reka der Fall war, wird man auf einen mittleren normalen Zustand mit mässig nachquillender Lava schliessen müssen. Wenn eine horizontale Vergrösserung nur in sehr beschränktem Maasse und nur

dadurch bewirkt wird, dass die aufquellende Masse die erstarrten Blöcke über sich nach dem steileren Rande hinschiebt und über diesen hinabstürzt, wie ich dies gleichzeitig am Georg beobachtete, kann natürlich nur wenig glühende Masse nachquellen. Durch die eben angedeutete Bewegung in der erstarrten Oberfläche wurden auch die concentrischen Rücken und Furchen gebildet, die oben erwähnt wurden und die auch das Stübel'sche Relief deutlich wiedergiebt. Wenn dagegen die Lava wieder reichlicher zu fliessen beginnt, wird dieselbe den „Schlackensack" durchbrechen und aus einzelnen Spalten hervordringend neue Lavaausläufer bilden. Dergleichen Durchbrüche werden als „nicht selten" von K. v. Fritsch, W. Reiss und A. Stübel erwähnt. Die südliche Verlängerung des Georg und die Maionisi sind wahrscheinlich solche Ausläufer. Das Profil der Aphroëssa und noch besser des Georg zeigen, wie gering die verticale Auftreibung im Verhältnisse zur Dicke und besonders den horizontalen Dimensionen des Lavaergusses damals war. Vortrefflich lassen sie auch die durch die Form des älteren Bodens bedingte, im Gegensatz zu Aphroëssa am Georg nur geringe Rückstauung von der Ausbruchstelle aufwärts im Vergleich zu dem abwärts fliessenden Hauptstrom erkennen. Im Laufe der Zeit musste natürlich die Erstarrungskruste immer dicker, die Reibung beim Fortschieben immer grösser und daher das Durchbrechen derselben immer schwieriger werden. Das bedingte eine beträchtlichere vertikale Auftreibung, wie sie von Herrn Fouqué Ende Februar 1867 wirklich festgestellt worden ist. Zu den Kegeln der Nea und Mikra war ein dritter, ungefähr gleich hoher, ein Georg-Kegel hinzugekommen. Die Aphroëssa scheint schon damals keinen Lavazufluss mehr gehabt zu haben.

Der Lavaerguss erfolgte bis zum 20. Februar ohne heftigere Eruptionsphänomene und ohne Kounoupidien. Die Pulsationen der beiden Eruptionsmassen sind völlig unabhängig von einander und selbst während der grossen Explosionen des Georg im Februar, wie bei den späteren Kounoupidien zeigte die Aphroëssa absolut keine oder doch nur eine unmerkliche Steigerung ihrer Intensität. Die Ursache der Pulsationen und selbst der grossen Explosionen muss daher in der einzelnen Erup-

tionsmasse selbst und nicht in ihrer gemeinsamen Quelle liegen. Da man nun aber bei einem Abstande der beiden Ausbruchsöffnungen von nur 6 bis 700 M. ziemlich sicher voraussetzen darf, dass der Lavaerguss erst in geringer Tiefe unter der Oberfläche sich in zwei Arme theilte: so wird die Ursache jener Eruptionsphänomene in noch geringerer Tiefe und am wahrscheinlichsten in dem durch die Hauptspalten zum glühenden Kern eindringenden Meerwasser gesucht werden müssen. Der Conflict zwischen ihnen ist nicht bloss die Ursache der Pulsationen, sondern er erzeugt auch die grossen Explosionen. Die specielle Veranlassung der letzteren ist aber bis jetzt nicht sicher zu ermitteln. Schon die ganz zufällige Bildung neuer tieferer Spalten kann sie erzeugt haben. Aphroëssa, die nur geringe Pulsationen, nur wenige und unbedeutende Explosionen hatte, liess auch keine Spalten erkennen und besass bestimmt keinen Punkt, an welchem die Dämpfe so concentrirt ausbrachen, wie auf dem Georg. Interessant wäre es festzustellen, ob bei den Verschiebungen der höchsten Wölbung des Georg diese Hauptausbruchstelle unbeweglich blieb, oder ob sie stets in der höchsten Wölbung sich befand. Schon die Analogie der Nea und Mikra lässt das letztere erwarten. Das Nachquillen glühender Lava unter dieser Stelle und das continuirliche Aufsteigen der „im Einzelnen schussartig wirkenden" Dämpfe in der Höhe der nämlichen Gegend mögen in gleicher Weise dies Zusammenfallen der höchsten Auftreibung mit der Hauptausbruchstelle bewirken. Es braucht wohl kaum noch besonders hervorgehoben zu werden, dass, da die ausbrechenden und explodirenden Wasserdämpfe erst nach der Theilung der Lavamasse in zwei Arme sich bildeten, diese auch nicht die Lava aus der Tiefe heraus gehoben haben können.

Georg und Aphroëssa sind das Resultat eines sehr zähflüssigen Lavaergusses. Nur eine Lava, die unmittelbar nach ihrem Ausbruche auch schon eine dicke Erstarrungskruste gebildet hatte, konnte auf einer 8° bis 24° geneigten Fläche Formen und Böschungen annehmen, wie Georg und Aphroëssa sie zeigen. Der Grund zu diesem raschen Erstarren liegt entweder in der Lava selbst oder in äusseren Ursachen, die erst bei dem Ausbruch auf die Lava einwirkten und eine äusserst jähe Erkaltung

herbeiführten, das ist also entweder wiederum in einem äusserst langsamen Ausfliessen derselben oder in dem Meereswasser, welches die Lava anfänglich ausschliesslich umgab. Wenn aber das Meerwasser die schnelle Abkühlung herbeigeführt hätte, so ist nicht abzusehen, warum dann nicht wenigstens der Lavanachschub, welcher den hohen Kegel des Georg bildete, lieber in langen bandförmigen Strömen aus dem schützenden Lavasack hervorbrach. Und wenn dazu an Georg und Aphroëssa etwa zufällig keine Gelegenheit war, warum haben auch die ganz gleichartig entstandenen Mikra und Nea keine Lavaströme von der Form der Aetnäischen und Vesuvianischen gegeben? Die von Stübel angegebene radiale Anordnung der Laven auf der Nea würde man, auch wenn sie wirklich so deutlich ausgeprägt wäre, nicht ohne Weiteres auf ebensoviel Lavaströme, als Rücken vorhanden, deuten dürfen, denn es fehlt die charakteristische Oberflächenbeschaffenheit solcher Ströme. Wenn nur das umgebende Medium an der schnellen Erstarrung schuld war, so müsste doch mindestens der supramarin gebildete Schlackensack von den unterseeisch erstarrten und als schwimmende Scholle gehobenen Partien sich unterscheiden lassen. Aber das ist nicht der Fall. Das umgebende Wasser ist nicht die Ursache von Lavabildungen wie der Georg, die Aphroëssa und die Kaymeni-Inseln. Die schnellere Abkühlung, welche durch das Wasser herbeigeführt werden kann, wird reichlich compensirt durch diejenige, welche die weite Ausdehnung und die geringe Mächtigkeit der supramarinen bandförmigen Lavaströme bewirken muss.

Aber auch auf die Art der Eruption, auf ein allzulangsames Ausfliessen der Lava kann man die mächtige Erstarrungsrinde nicht schieben. Der Nachschub war allerdings zeitweise nur ein sehr geringer und auch der Erguss als Ganzes kann nicht verglichen werden mit jenen grossen Eruptionen, die in kürzester Frist die gewaltigsten Lavamassen liefern, wie z. B. mit dem grossen Ausbruch des Vesuv im Jahre 1631, der nach Le Hon in 2 Stunden über 27 Millionen Kubikmeter Lava geliefert haben soll. Aber zu anderen Zeiten, im Anfange der Eruption und im Mai, ist die neue Lava, so weit der unterseeische Erguss zu bestimmen ist, immer noch eben so schnell ausgeflossen, als wie die klei-

neren Ströme anderer Vulkane, die auf gleicher Böschung noch in ausgezeichnet bandartigen Streifen sich fortwälzen.

Die Ursache der schnellen Erkaltung liegt daher in der Lava selbst, die in der That „*at its minimum of fluidity*“ hervorbrach, wie dies M. Scrope, wenn auch mit einzelnen Abweichungen im Detail, schon vor langen Jahren ganz richtig für die analogen Bildungen der Auvergne angenommen hatte. Diese Zähflüssigkeit der Lava ist aber entweder in einem geringeren, ihrem Erstarrungspunkte nahe liegenden Wärmegrade begründet, oder in ihrer chemischen Zusammensetzung.

Die älteren Kaymeni sind auf ganz die gleiche Weise entstanden, wie Georg und Aphroëssa. Das beweist nicht nur ihre ganze äussere Beschaffenheit, sondern es lassen das auch die über ihre Entstehung und besonders über die Bildung der Nea vorliegenden Berichte klar erkennen. Die île blanche der Eruption von 1707 mit ihren Seethieren, die nach Edw. Forbes (Reports of the Brit. Ass. f. adv. of sc. for 1843), mindestens aus 36 Fathoms Tiefe herrühren, schien ein glänzender Beweis für die ältere Erhebungstheorie, aber sie war in Wahrheit nur eine auf der nenen Lava schwimmende Scholle des alten Meeresbodens. Interessant ist das Vorhandensein von Kraterbecken auf der Nea und Mikra bei so wenig Auswürflingen. Sie bildeten sich erst gegen das Ende der Eruption durch die andauernde Dampfbildung, wie von der Nea ausdrücklich berichtet wird. Vielleicht, dass Georg jetzt auch einen solchen besitzt und in ähnlicher Weise wie jene mit einem dünnen Aschen- und Lapillenmantel sich umkleidet. Da dieser auf die Böschung des Nea- und Mikrakegels keinen wesentlichen Einfluss haben kann und nur die Rauhigkeiten des Abhangs einebnete, so scheinen die homogenen nur aus Lava gebildeten Kegel als Maximum den gleichen mittleren Neigungswinkel haben zu können, der auch das Maximum der Steilheit in den abwechselnd aus Lava und Auswürflingen gebildeten Kegeln ausmacht. Die Eruption von 729 wird merkwürdig durch den von ihr berichteten grösseren Reichthum an Auswürflingen, die bis nach Kleinasien und selbst bis nach Abydos auf den Wellen des Meeres geschwommen sein sollen. Danach sollte man auch auf der Nikolaosspitze einen

Krater erwarten. Die Palaea endlich ist unschätzbar für die Kenntniss der inneren Structur von derlei Lavaergüssen und lehrt, dass schon unter einer wenig mächtigen Hülle halb verglaster Gesteine ausgezeichnet felsitische und zum Theil völlig dichte Massen sich einstellen.

Die Caldera von Santorin ist durch Explosion entstanden und durch Denudation nur wenig vergrössert worden. Dass die Calderen, die grossen Kraterthäler [1]) im Centrum mancher Vulkangerüste mit regelmässig radial abfallenden Schichten, nicht durch eine domförmige Erhebung gebildet worden sein können, braucht wohl nicht nochmals bewiesen zu werden. Selbst ein Wachsthum durch Injection von Lavagängen (*an inward growth*) wird man in der fast gänzlich gangfreien Caldera von Santorin nicht annehmen dürfen. Es können daher nur Explosion und Denudation, sowie die durch beide erzeugten Einstürze dieselben gebildet haben und es ist die Aufgabe an jedem einzelnen Vulkan nachzuweisen, in wie weit diese beiden Ursachen thätig gewesen sind und welcher Art jene Denudation war. Dieselben durch eine gewaltige Versenkung (*engulfment*, *enfoncement*) entstehen zu lassen, wie Manche geneigt zu sein scheinen, ist eine Hypothese, die nur Weniges vor der alten Theorie der Erhebungskratere voraus hat: denn, wenn sich auch wohl nicht die Unmöglichkeit derselben nachweisen lässt, so widerstrebt sie den allgemeinen philosophischen Principien der Geologie doch offenbar ebenso sehr als jene. Wenn hier der Ausdruck Explosion gebraucht wird, so denke ich selbstverständlich auch nicht an eine einzige Katastrophe, sondern an häufig wiederholte, unmittelbar auf einander folgende Explosionen, wie sie H. v. Dechen für die Maare der Eifel

1) Von diesen ächten Calderen müssen nicht nur die sogenannten „intercollinen Thäler", wie der Curral, und das Thal von S. Vicente und der Serra d'Agoa, wie Hartung betont, als ganz verschiedene Bildungen getrennt werden, sondern auch jene flachen Tuffumwallungen, die an manchen Vulkanen Central-Amerikas vorkommen und über deren nur durch Erosion bedingte Entstehungart ich eine kurze Mittheilung auf der Naturforscher-Versammlung zu Hannover 1865 machte (S. Amtl. Ber. S. 159), dürfen nicht zu ihnen gerechnet werden. Eine ausführlichere Darstellung derselben wird nächstens in meinen Beiträgen zur Geologie von Central-Amerika erscheinen.

(Laacher-See S. 99) und G. Hartung für die Calderen der Azoren (Hartung Azoren S. 312) angenommen haben. Der Ausdruck Explosion steht für Dampferuptionen, die kein oder doch nur wenig neues Material aus dem Inneren der Erde heraufbringen und statt dessen, ihren Schornstein ausbrennend, das fein zerriebene Material der Kraterwände in grossen Aschenregen weithin verbreiten. Welche Grösse schon diese ausschliesslich durch Explosion gebildeten Calderen erreichen können, zeigt nicht nur die von Hartung viel erwähnte Lagoa do fogo, die, im Jahre 1563 ausgeblasen, etwas über ½ Seemeile breit und eine Seemeile lang ist, sondern in noch grossartigerer Weise der Coseguina, dessen — leider vorher nicht gemessener — Krater durch die berühmte Eruption vom 23. Januar 1835 in 43 Stunden, nach meinen eigenen, mit der Darstellung Sir Edw. Belchers auf der englischen Admiralitätskarte fast genau übereinstimmenden Winkelmessungen, bei nahezu kreisförmiger Gestalt 1½ Seemeilen Durchmesser hat. Ja die Caldeira das sete Cidades, die allerdings vor den Zeiten historischer Aufzeichnungen entstand, aber nach Hartung's vortrefflicher Beschreibung doch verhältnissmässig neueren Datums ist und nur wenig durch spätere Erosion erweitert ward, erreicht einen Durchmesser von fast 2¾ Seemeilen, bei einer ungefähren mittleren Tiefe von 250 Fathoms. Die mittlere Tiefe übersteigt also schon um ein Geringes die mittlere Caldera-Tiefe von Santorin, aber der Durchmesser ist auf Santorin allerdings noch einmal so gross. Dennoch ist auch sie auf die nämliche Weise gebildet worden. Auch wenn man eine Senkung um 200 oder mehr Fathoms annehmen will, so würde man doch die Bildung der Caldera von Santorin nicht der Erosion durch fliessendes Wasser zuschreiben dürfen: denn wenn eine Caldera von einem Krater von nur geringem Durchmesser ausgehend wesentlich durch supramarine Erosion gebildet worden ist, so ist ein Barranco vorhanden, durch welchen die abgespülten und eingestürzten Schuttmassen aus dem Kessel hinausgeführt werden können. Das ist aber auf Santorin nicht der Fall, da die Sohle des grossen Thals zwischen Apanomeria und Therasia in die Caldera hinein abfällt. Die Erosion durch die Brandung des Meeres ist aber bloss eine nivellirende. Sie unterwäscht die steilen

Abhänge und bildet vor ihnen submarine, sanft ansteigende Böschungen, an denen ihre Kraft dann später sich machtlos bricht. Solche wenig steile Abfälle, verbunden mit der durch diese Erosion gleichzeitig bewirkten Erweiterung der Calderaränder, finden wir in der That in der unterseeischen Umwallung zwischen Thera und Aspronisi und zwischen der letzteren und Therasia. Der auch submarin noch immer steil abfallende Innenrand von Thera und Therasia beweist aber, dass hier die marine Erosion die ursprüngliche Gestalt des Kraterthals nur wenig verändert haben kann. Der Grund zu einer so ungleichen Einwirkung kann in schon ursprünglich vorhandenen Eigenthümlichkeiten des inneren Baues gelegen haben; sie ist aber jedenfalls auch wesentlich begünstigt worden durch die herrschenden Nordsüd-Winde. Eine so gewaltige Explosion, wie die demnach anzunehmende, musste natürlich auch ungeheuere Massen von Asche, Lapillen und Blöcken auswerfen, die noch heute vorhanden sind und als die mächtige weisse Andesittuffdecke alle drei Inseln überziehen.

Der Anfang der vulkanischen Thätigkeit von Santorin wird erst nach einem sorgfältigen Studium der bei Acrotiri aufgefundenen Petrefacten sich genauer bestimmen lassen. Der Umstand aber, dass die Caldera und die Kaymeni einen so ganz verschiedenen Bau zeigen, macht es mir persönlich wahrscheinlich, dass die Dauer derselben eine sehr lange ist.

Das Material, welches der Vulkan aus der Tiefe heraufbrachte, war zu allen Zeiten chemisch und mineralogisch nur wenig verschieden.

Der Vulkan von Santorin baute sich also anfänglich durch Aufschüttung aus abwechselnden Schichten von vorherrschend ausgeworfenen Massen und Laven auf und zwar wohl anfänglich, jedenfalls aber theilweise, submarin. Der Vulkan war damals, wie nicht nur die geringe Zahl der in ihm erkennbaren Lavagänge, sondern besonders auch deren nicht allseitige, radiale, sondern nur der Querreihe parallele Vertheilung erkennen lässt, ein gangloser (hier nur gangarmer) Strato-Vulkan. Eine grosse Dampferuption (Explosionen) bliess dann den Kraterschlund

aus, bedeckte die Abhänge des Vulkans mit einer dicken Schuttdecke und bildete die weite Caldera, die nur nach Südwest durch marine Erosion erweitert wurde und unter den Seespiegel versank. Auch das grosse Thal zwischen Apanomeria und Therasia wurde vermuthlich gleich durch diese Eruption gebildet und nur später durch marine Erosion erweitert. Der Vulkan nahm dann seine neubildende Thätigkeit wieder auf und ergoss in grossen Zwischenräumen zähflüssige Lavamassen, die um ihre Ausbruchstelle sich aufstauend zu einer centralen Inselgruppe emporquollen. Die Dampfentwickelung war bei ihnen nur eine geringe, es bildete sich kein neuer Centralschlund und es gab keine Schichten von Auswürflingen Er ist jetzt ein homogener Cumulo-Vulkan. Heute ist der centrale Dom noch vielgipfelig und lässt noch immer die der Querreihung parallelen Ausbrüche unterscheiden; aber schon hat die neue Eruption das tiefste Thal zwischen ihnen beträchtlich aufgehöht, und wenn er in seiner ganzen Höhe auftauchte über die Seefläche und der langsamen Zerstörung durch die Atmosphärilien preisgegeben wäre, würde er in seinem Bau und seiner Structur ganz übereinstimmen mit dem benachbarten Trachytdom von Methana und schon nach wenigen Jahrtausenden sich nicht mehr unterscheiden lassen von den Kuppen und Domen der sogenannten neu-plutonischen (känozoischen) Periode, weil auch diese nichts sind als durch Erosion umgestaltete, massige Lavaergüsse, Kluftausbrüche und Cumulovulkane.

N a c h t r a g.

Erst nach Abschluss der vorstehenden Abhandlung sind mir A. Kenngott: Ueber die Eruptionsgesteine der Santorin-Inseln, vorläufige Mittheilung (in Verh. der k. k. geol. Reichsanstalt 1867, S. 278 Bericht vom 30. Sept.) und A. Daufalik: Neuere Mittheilungen über die vulk. Thätigkeit auf Santorin, ebenfalls nur eine vorläufige Anzeige (ebenda S. 319 Bericht vom 5. Nov.) zugekommen. Auch das neuste Stück der Arbeiten von K. v. Fritsch, W. Reiss und A. Stübel über Santorin (ohne geologischen Text), ist mir erst während des Druckes des letzten Bogens zugegangen. So weit man aus diesen Publikationen bis jetzt ersehen kann, werden durch die Arbeiten der genannten Herren die hier mitgetheilten Beobachtungen zwar vielfach ergänzt und erweitert, im Allgemeinenen aber bestätigt.

KARTE
des
Lavaergusses von 186
(bis zum 30. Mai)

Aeltere Laven } nach der Engl. Seekarte
18 Aeltere Lothungen }

Ungefährer Stand der Eruption am 15. Febr
15 Lothungen Ende März nach S. M. Corvette Nymp

Stand der Eruption am 4. April } nach K. u. Se
18 Lothungen am 9. April }

Stand der Erupt. Anf. Mai } nach { K. v. Fritsch
Stand d. Erupt. am 30. Mai } { Dr. Reiss
(18) Lothungen Ende Mai } { A. Stübel

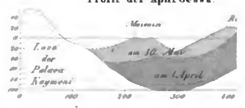
Pa

N

W O

S

Profil der Aphroëssa.



ABHANDLUNGEN

DER

MATHEMATISCHEN CLASSE

DER

KÖNIGLICHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN
ZU GÖTTINGEN.

DREIZEHNTER BAND.

Ueber die Fläche vom kleinsten Inhalt bei gegebener Begrenzung.

Eine Abhandlung

von

Bernhard Riemann.

Bearbeitet von

K. Hattendorff.

Den Gegenstand dieser Abhandlung bildet die Aufgabe, von allen Flächen, die sich durch eine im Raume gegebene Begrenzung legen lassen, diejenige vom kleinsten Inhalt ausfindig zu machen. Diese Aufgabe ist nicht neu. Sie hat seit der Mitte des vorigen Jahrhunderts die Aufmerksamkeit der Mathematiker auf sich gezogen. Der erste, der sich mit ihr beschäftigt hat, ist Lagrange. In der Abhandlung, welche die Grundlage der heutigen Variationsrechnung bildet (Miscellanea Taurinensia T. II. 1761), leitet er die Differentialgleichung der Minimalfläche ab, nemlich

$$(1 + q^2)\, r - 2pqs + (1 + p^2)\, t = 0.$$

Dabei sind rechtwinklige Coordinaten vorausgesetzt und z wird als Function der unabhängigen Variabeln x und y angesehen. p und q sind die ersten, r, s, t die zweiten partiellen Derivirten von z, nach x und y genommen. Die Integration der partiellen Differentialgleichung ist Lagrange nicht gelungen. Er beschränkt sich auf die Bemerkung, dass die Gleichung erfüllt werde, wenn $p = q = 0$, folglich auch $r = s = t = 0$ ist, d. h. wenn die Fläche eine Ebene ist. Nach Lagrange hat Meusnier die Aufgabe behandelt in dem Mémoire sur la courbure des surfaces, welches 1776 in der Pariser Akademie verlesen und 1785 publicirt worden ist. (Mémoires présentés par divers savans. T. 10.).

Meusnier hat zuerst bemerkt, dass die Differentialgleichung dieselbe ist wie für eine Fläche, die in jedem Punkte gleiche und entgegengesetzt gerichtete Hauptradien der Krümmung hat. Er gelangt zu einer particulären Lösung, der Gleichung der Schraubenfläche, indem er die partielle Differentialgleichung in die beiden einfacheren zerlegt

$$q^2 r - 2pqs + p^2 t = 0,$$
$$r + t = 0.$$

Eine andere particuläre Lösung erhält er durch Aufsuchung der Rotationsfläche vom kleinsten Inhalt. Er findet, dass diese Fläche durch Rotation einer Kettenlinie um eine auf ihrer convexen Seite gelegene horizontale Axe entsteht.

Die erste vollständige Integration der partiellen Differentialgleichung verdanken wir Monge. Gegen seine Lösung der Aufgabe (Mémoires de l'Académie. 1784, p. 144) lässt sich aber einwenden, dass unter dem Integralzeichen Functionen von mehreren Variabeln vorkommen, die der Bedingung der Integrabilität nicht Genüge leisten. Daher versuchte Legendre (Mémoires de l'Académie 1787. p. 309) auf einem andern Wege, die allgemeine Lösung zu ermitteln. Er gibt sie in den drei Gleichungen

$$x = A^3\Phi'' - 3Aa\Phi' + B^3\Psi'' - 3Bb\Psi',$$
$$y = -A^3a\Phi'' + (2a-1)A\Phi' - B^3b\Psi'' + (2b-1)B\Psi',$$
$$z = -A^4\Phi'' + 2A^2a\Phi' - \Phi + B^4\Psi'' - 2B^2b\Psi' + \Psi.$$

Darin ist $\sqrt{-a^2-1} = A$, $\sqrt{-b^2-1} = B$ gesetzt. Φ ist eine willkürliche Function von a, Ψ eine willkürliche Function von b. Um die Gleichung der Fläche zu erlangen, hätte man a und b aus den drei Gleichungen zu eliminiren. Als Specialfälle werden die beiden schon von Meusnier gefundenen Flächen behandelt.

Bei der Untersuchung der charakteristischen Linien fand Monge, dass jeder solchen Linie nicht zwei, sondern drei Gleichungen angehören, dass also die charakteristischen Linien sich auf Punkte reduciren (Applications de l'analyse à la géométrie. Paris 1807. p. 187). Zu zwei andern wichtigen Eigenschaften der Fläche gelangte Dupin (Développe-

ments de géométrie. Paris 1813. p. 187), dass nemlich die indicatorischen Linien gleichseitige Hyperbeln sind, und dass die asymptotischen Linien rechte Winkel mit einander bilden, die von den Krümmungslinien halbirt werden.

Diese allgemeinen Eigenschaften aller Minimalflächen ergeben sich aus der partiellen Differentialgleichung. Um sie zu erkennen, bedarf es nicht der schon von Legendre und Monge gegebenen allgemeinen Lösung. Auch war die Form dieser Lösung für die Anwendung wenig günstig. Daher verzichtete man darauf, aus ihr die Eigenschaften der Fläche abzuleiten oder durch Specialisirung der willkürlichen Functionen zu besondern Flächen überzugehen.

Gleichwohl erschien es wünschenswerth, ausser den beiden von Meusnier gegebenen Beispielen andere Flächen aufzusuchen, die der partiellen Differentialgleichung Genüge leisten. Und es musste dann von Interesse sein, den Zusammenhang der einzelnen Flächen mit der allgemeinen Lösung der partiellen Differentialgleichung klar zu legen. Beide Aufgaben stellt sich Scherk in der 1831 von der Jablonowskischen Gesellschaft gekrönten Preisschrift. Er gibt die Differentialgleichung des Minimum für rechtwinklige und für Polar-Coordinaten und sucht particuläre Lösungen auf dem von Meusnier eingeschlagenen Wege, nemlich durch Zerlegung in zwei einfachere Differentialgleichungen. Dann wird die Form der willkürlichen Functionen bestimmt, durch welche die allgemeine Lösung in die gewonnenen particulären Lösungen übergeht.

Derselbe Grundgedanke von der Zerlegung in mehrere Differentialgleichungen findet sich in einer Arbeit von Catalan aus dem Jahre 1858 (Journal de l'Ecole polyt. Cah. 37 p. 130). Zunächst wird in mannichfaltigerer Weise als bei Scherk durch verschiedene Wahl der unabhängigen Variabeln die partielle Differentialgleichung transformirt. Für jede der entstehenden einzelnen Formen ermittelt Catalan particuläre Lösungen, indem er die gesuchte Function als Summe von zwei Functionen voraussetzt, von denen die eine nur die eine, die andre nur die

andre unabhängige Variable enthält. Endlich werden die Krümmungslinien untersucht.

Schon in zwei früheren Aufsätzen hat Catalan die Aufgabe der Minimalfläche behandelt (Journal de l'Ecole polyt. 1843. Cah. 29. p. 121. — Liouville, Journal T. 7. 1842). Aber er beschränkt sich darin auf den Nachweis, dass die Schraubenfläche (l'hélicoïde gauche à plan directeur) die einzige Regelfläche sei, die der Minimalbedingung Genüge leistet.

Auch Michael Roberts (Liouville, Journal T. 11) geht bei der Aufsuchung einzelner Minimalflächen nur darauf aus, die willkürlichen Functionen so zu bestimmen, dass die Fläche durch ein Gerade erzeugt wird, die bei ihrer Bewegung einer gegebenen Ebene parallel bleibt, oder dass sie durch Rotation einer Curve entsteht. Dabei ergeben sich natürlich die beiden Beispiele von Meusnier.

Auf alle bisher genannten Untersuchungen passt mehr oder weniger, was Catalan von seiner Arbeit aus dem Jahre 1858 sagt. Die Minimaleigenschaft der Fläche kömmt entweder gar nicht oder nur in zweiter Linie in Betracht. Auf der fertigen Fläche wird ein geschlossener Contour gezeichnet. Dieser umschliesst dann auf der Fläche einen kleineren Inhalt als auf irgend einer andern durch ihn gelegten Fläche. Wie die Minimalfläche gestaltet sei für einen von vorn herein gegebenen räumlichen Contour, davon ist gar nicht die Rede.

Und doch wird diese Frage bereits von Gergonne (Annales de Mathématiques T. 7. 1816—17) besonders betont. Die von ihm gestellten Aufgaben beziehen sich zum Theil auf eine krummlinige, zum Theil auf eine geradlinige gegebene Begrenzung. Aber von allen diesen Aufgaben ist nur die einfachste, die auf die Schraubenfläche führt, von Tédénat gelöst worden (L. c. p. 148. 283).

Erst im Jahre 1843 hat Björling die eigentliche Frage ins Auge gefasst (Grunert, Archiv Bd. 4. p. 290). Er findet, dass die in der allgemeinen Lösung der partiellen Differentialgleichung auftretenden willkürlichen Functionen sich bestimmen lassen, wenn als Begrenzung eine geschlossene räumliche Curve gegeben ist und in jedem Punkte

der Begrenzung die Richtung der Normalen als bekannt vorausgesetzt wird.

Zu demselben Resultate gelangt Ossian Bonnet in seinem grossen Mémoire sur l'emploi d'un nouveau système de variables dans l'étude des propriétés des surfaces courbes (Liouville, Journal. Série 2. T. 5. 1860 p. 153. Vgl. Comptes rendus 1853. T. 37. p. 531. — 1855. T. 40 p. 1107. — 1856. T. 42. p. 532). Durch eine geschickte Wahl der unabhängigen Variabeln stellt er die partielle Differentialgleichung sowie ihre allgemeine Lösung in sehr einfacher Form her. Nachdem einige Specialfälle kurz erwähnt sind, werden die Krümmungslinien, die asymptotischen Linien, die Linien des stärksten Abfalls, die geodätischen Linien untersucht. Dann concentrirt sich die Aufmerksamkeit auf die Frage nach der Minimalfläche, welche gewissen geometrischen Bedingungen Genüge leistet. Als solche Bedingungen treten auf, dass die Fläche durch Rotation oder durch schraubenförmige Bewegung einer Curve entstehen solle, dass sie eine windschiefe Fläche sei, dass ihre Krümmungslinien ebene Curven seien, und endlich dass die Fläche durch gegebene Linien gehe. Diese letzte Aufgabe bezeichnet Ossian Bonnet als besonders schwierig. Er behandelt sie nur für einige specielle Fälle, von denen hier nur zwei in Betracht kommen, nemlich die Aufgabe Björlings und die Frage nach der Minimalfläche, die durch zwei sich kreuzende gerade Linien geht.

Diese letzte Frage ist auf einem andern Wege noch von Serret untersucht worden (Comptes rendus 1855. T. 40. p. 1078). Serret schafft aus Legendre's Lösung das Imaginäre heraus und führt die gegebenen Grenzbedingungen ein. Die beiden willkürlichen Functionen der allgemeinen Lösung werden dadurch auf eine willkürliche periodische Function reducirt. Darin spricht sich eine scheinbare Unbestimmtheit des Resultates aus, die schon von Tédénat bemerkt ist und Gergonne zu Bedenken Anlass gegeben hat. Jene willkürliche Function lässt sich aber leicht dahin interpretiren, dass die durch die beiden geraden Linien gelegte Fläche, die der partiellen Differentialgleichung Genüge leistet, ausserdem noch an Nebenbedingungen geknüpft sein kann.

Bemerkenswerth ist die Schlussäusserung von Serret, wonach er die willkürliche Function so bestimmen will, dass die Fläche ausser den beiden gegebenen noch andere Begrenzungslinien habe. Diese Andeutung ist von ihm nicht weiter ausgeführt, ja es ist nicht einmal die Frage nach der Minimalfläche erledigt, die durch die beiden Geraden geht und keinen weiteren Bedingungen unterworfen ist.

Das sind im Wesentlichen die Resultate, zu denen man bis jetzt gelangt ist. Die Frage nach der Minimalfläche, deren gegebene Begrenzung aus geraden Linien besteht, ist danach kaum für den einfachsten Fall erschöpfend beantwortet. Die Untersuchung dieser Frage in ihrer völligen Allgemeinheit ist der Hauptgegenstand der vorliegenden Abhandlung. Ausserdem wird dann noch die Minimalfläche ermittelt, für welche zwei beliebige Kreise in parallelen Ebenen als Begrenzung gegeben sind. Die Minimalflächen, deren Begrenzung aus getrennten Curven bestehen soll, sind bisher noch gar nicht untersucht. Die Resultate von Björling und Bonnet beziehen sich auf eine einzige geschlossene Grenzcurve, in welcher überall die Richtung der Normalen gegeben ist. Björling bemerkt ausdrücklich, dass er die Frage ganz unbeantwortet lassen müsse, wenn die Begrenzung aus getrennten Curven bestehe.

Die in Anwendung gebrachte Methode beruht auf der allgemeinen Theorie der Functionen von complexen Variabeln. Dass hier das eigentliche Gebiet für die Behandlung der Aufgabe sei, kann man auch in den bisherigen Arbeiten deutlich erkennen. Schon Legendre's allgemeine Lösung der partiellen Differentialgleichung enthält die willkürlichen Variabeln mit der imaginären Einheit als Factor behaftet. Freilich waren damals die complexen Grössen noch nicht eingebürgert, und man erblickte daher in ihrem Auftreten nur eine Schwierigkeit mehr, die der Anwendbarkeit jener allgemeinen Lösung sich entgegenstellte. Und dennoch, wie sehr man sich auch bemühen mochte, das Imaginäre fern zu halten, es tritt immer aufs neue wieder hervor. Björlings Verfahren beruht in seinem ersten Schritte darauf, dass zwei conjugirte complexe Grössen als Variable eingeführt werden. Die Form endlich, in welche Bonnet die partielle Differentialgleichung bringt, wie seine Lö-

sung drücken nichts anderes aus, als dass die gesuchte reelle Grösse (die eine der rechtwinkligen Coordinaten) eine Function von complexen Variabeln sei. Und dennoch sucht Bonnet, wie vor ihm Serret, sein Hauptverdienst darin, die Lösung von allem Imaginären befreit zu haben. Da ist es erklärlich, dass er stehen bleibt, wo die eigentliche Aufgabe anfängt, nemlich die Untersuchung der Grenz- und Unstetigkeitsverhältnisse. Diese Untersuchung gehört ihrem Wesen nach in die von Riemann geschaffene Theorie der Functionen von complexen Variabeln.

Es ist dem Verfasser nicht vergönnt gewesen, seine Arbeit noch selbst zu redigiren. Ich habe es als ein schönes Zeichen seines Vertrauens zu verehren, dass er die Ausarbeitung mir übertragen hat. Aber ich bin mir auch der Schwierigkeiten einer solchen Aufgabe wohl bewusst. Und wenn auch ein grosser Theil der Arbeit noch vor Riemanns Tode beendigt worden ist und seine Zustimmung erlangt hat, so kann ich doch nicht erwarten, die Vollendung der Darstellung erreicht zu haben, die Riemann selbst seiner Arbeit gegeben haben würde. Ich betrachte meine Mitwirkung nur als ein Zeichen des Dankes und der Verehrung für meinen leider so früh dahingeschiedenen Lehrer.

Göttingen, den 6. Januar 1867.

K. Hattendorff.

1.

Eine Fläche lässt sich im Sinne der analytischen Geometrie darstellen, indem man die rechtwinkligen Coordinaten x, y, z, eines in ihr beweglichen Punktes als eindeutige Functionen von zwei unabhängigen veränderlichen Grössen p und q angibt. Nehmen dann p und q bestimmte constante Werthe an, so entspricht dieser einen Combination immer nur ein einziger Punkt der Fläche. Die unabhängigen Variabeln p und q können in sehr mannichfacher Weise gewählt werden. Für eine einfach zusammenhangende Fläche geschieht dies zweckmässig wie folgt. Man lässt die Fläche längs der ganzen Begrenzung abnehmen um einen Flächenstreifen, dessen Breite überall unendlich klein in derselben Ordnung ist. Durch Wiederholung dieses Verfahrens wird die Fläche fortwährend verkleinert, bis sie in einen Punkt übergeht. Die hierbei der Reihe nach auftretenden Begrenzungscurven sind in sich zurücklaufende, von einander getrennte Linien. Man kann sie dadurch unterscheiden, dass man in jeder von ihnen der Grösse p einen besondern constanten Werth beilegt, der um ein Unendlichkleines zu- oder abnimmt, je nachdem man zu der benachbarten umschliessenden oder umschlossenen Curve übergeht. Die Function p hat dann einen constanten Maximalwerth in der Begrenzung der Fläche und einen Minimalwerth in dem einen Punkte im Innern, in welchen die allmählich abnehmende Fläche zuletzt zusammenschrumpft. Den Uebergang von einer Begrenzung der abnehmenden Fläche zur nächsten kann man dadurch herge-

stellt denken, dass man jeden Punkt der Curve (p) in einen bestimmten unendlich nahen Punkt der Curve $(p + dp)$ übergehen lässt. Die Wege der einzelnen Punkte bilden dann ein zweites System von Curven, die von dem Punkte des Minimalwerthes von p strahlenförmig nach der Begrenzung der Fläche verlaufen. In jeder dieser Curven legt man q einen besondern constanten Werth bei, der in einer beliebig gewählten Anfangscurve am kleinsten ist und von da beim Uebergange von einer Curve des zweiten Systems zur andern stetig wächst, wenn man zum Zweck dieses Ueberganges irgend eine Curve (p) in bestimmter Richtung durchläuft. Beim Uebergange von der letzten Curve (q) zur Anfangscurve ändert sich q sprungweise um eine endliche Constante.

Um eine mehrfach zusammenhangende Fläche ebenso zu behandeln, kann man sie zuvor durch Querschnitte in eine einfach zusammenhangende zerlegen.

Irgend ein Punkt der Fläche lässt sich hiernach als Durchschnitt einer bestimmten Curve des Systems (p) mit einer bestimmten Curve des Systems (q) auffassen. Die in dem Punkte (p, q) errichtete Normale verläuft von der Fläche aus in zwei entgegengesetzten Richtungen, der positiven und der negativen. Zu ihrer Unterscheidung hat man über die gegenseitige Lage der wachsenden positiven Normale, der wachsenden p und der wachsenden q eine Bestimmung zu treffen. Ist nichts anderes festgesetzt, so möge, von der positiven x Axe aus gesehen, die positive y Axe auf dem kürzesten Wege in die positive z Axe übergeführt werden durch eine Drehung von rechts nach links. Und die Richtung der wachsenden positiven Normale liege zu den Richtungen der wachsenden p und der wachsenden q, wie die positive x Axe zur positiven y Axe und zur positiven z Axe. Die Seite der Fläche, auf welcher die positive Normale liegt, soll die positive Seite der Fläche genannt werden.

2.

Ueber das Gebiet der Fläche sei ein Integral zu erstrecken, dessen Element gleich ist dem Flächenelement $dp\,dq$ multiplicirt in eine Functionaldeterminante, also

$$\iint\left(\frac{df}{dp}\cdot\frac{dg}{dq}-\frac{df}{dq}\cdot\frac{dg}{dp}\right)dp\;dq,$$

wofür zur Abkürzung geschrieben werden soll

$$\iint(df\;dg).$$

Denkt man sich f und g als unabhängige Variable eingeführt, so geht das Integral über in $\iint df\;dg$, und es lässt sich die Integration nach f oder nach g ausführen. Die wirkliche Einsetzung von f und g als unabhängigen Variabeln verursacht aber Schwierigkeiten oder wenigstens weitläufige Unterscheidungen, wenn dieselbe Werthencombination von f und g in mehreren Punkten der Fläche oder in einer Linie vorhanden ist. Sie ist ganz unmöglich, wenn f und g complex sind.

Es ist daher zweckmässig, zur Ausführung der Integration nach f oder g das Verfahren von Jacobi (Crelle's Journal Bd. 27 p. 208) anzuwenden, bei welchem p und q als unabhängige Variable beibehalten werden. Um in Beziehung auf f zu integriren, hat man die Functionaldeterminante in die Form zu bringen

$$\frac{d\left(f\,\frac{dg}{dq}\right)}{dp}-\frac{d\left(f\,\frac{dg}{dp}\right)}{dq}$$

und erhält zunächst $\int\frac{d\left(f\,\frac{dg}{dp}\right)}{dq}\cdot dq=0$, weil die Integration durch eine in sich zurücklaufende Linie erstreckt wird. Dagegen ist

$$\int\frac{d\left(f\,\frac{dg}{dq}\right)}{dp}\,dp$$

in der Richtung der wachsenden p zu nehmen, d. h. von dem Minimalpunkte im Innern durch eine Curve (q) bis zur Begrenzung. Man erhält $f\,\frac{dg}{dq}$ und zwar den Werth, den dieser Ausdruck in der Begrenzung annimmt, da an der untern Grenze des Integrals $\frac{dg}{dq}=0$ ist. Folglich wird

$$\int\int (df\, dg) = \int f \frac{dg}{dq}\, dq = \int f\, dg$$

und das einfache Integral rechts ist in der Richtung der wachsenden q durch die Begrenzung erstreckt. Andererseits hat man nach der eingeführten Bezeichnung $(df\, dg) = -(dg\, df)$, und daher

$$\int\int (df\, dg) = -\int\int (dg\, df) = -\int g\, df,$$

wobei das einfache Integral rechts ebenfalls in der Richtung der wachsenden q durch die Begrenzung der Fläche zu nehmen ist.

3.

Die Fläche, deren Punkte durch die Curvensysteme (p), (q) festgelegt sind, soll in der folgenden Weise auf einer Kugel vom Radius 1 abgebildet werden. Im Punkte (p, q) der Fläche, dessen rechtwinklige Coordinaten x, y, z sind, ziehe man die positive Normale und lege zu ihr eine Parallele durch den Mittelpunkt der Kugel. Der Endpunkt dieser Parallelen auf der Kugeloberfläche ist die Abbildung des Punktes (x, y, z). Durchläuft der Punkt (x, y, z) auf der stetig gekrümmten Fläche eine zusammenhangende Linie, so wird auch die Abbildung derselben auf der Kugel eine zusammenhangende Linie sein. Auf dieselbe Weise erhält man als Abbildung eines Flächenstücks ein Flächenstück, als Abbildung der ganzen Fläche eine Fläche, welche die Kugel oder einen Theil derselben einfach oder mehrfach bedeckt.

Der Punkt auf der Kugel, welcher die Richtung der positiven x Axe angibt, werde zum Pol gewählt und der Anfangsmeridian durch den Punkt gelegt, welcher der positiven y Axe entspricht. Die Abbildung des Punktes (x, y, z) wird dann auf der Kugel festgelegt durch ihre Polardistanz r und den Winkel φ, welchen ihr Meridian mit dem Anfangsmeridian einschliesst. Für das Vorzeichen von φ gilt die Bestimmung, dass der der positiven z Axe entsprechende Punkt die Coordinaten $r = \frac{\pi}{2}$, $\varphi = +\frac{\pi}{2}$ haben soll.

4.

Hiernach erhält man als Differential-Gleichung der Fläche

$$\cos r\, dx + \sin r\, \cos\varphi\, dy + \sin r\, \sin\varphi\, dz = 0. \tag{1}$$

Sind y und z die unabhängigen Variabeln, so ergeben sich für r und φ die Gleichungen

$$\cos r = \frac{1}{\pm\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dx}{dz}\right)^2}},$$

$$\sin r\, \cos\varphi = \frac{\frac{dx}{dy}}{\mp\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dx}{dz}\right)^2}},$$

$$\sin r\, \sin\varphi = \frac{\frac{dx}{dz}}{\mp\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dx}{dz}\right)^2}},$$

in welchen gleichzeitig entweder die oberen oder die unteren Vorzeichen gelten.

Ein Parallelogramm auf der positiven Seite der Fläche, begrenzt von den Curven (p) und $(p + dp)$, (q) und $(q + dq)$, projicirt sich auf der yz Ebene in einem Flächenelemente, dessen Inhalt gleich dem absoluten Werthe von $(dy\, dz)$ ist. Das Vorzeichen dieser Functionaldeterminante ist verschieden, je nachdem die im Punkte (p, q) errichtete positive Normale mit der positiven x Axe einen spitzen oder stumpfen Winkel einschliesst. In dem ersten Falle liegen nemlich die Projectionen von dp und dq in der yz Ebene ebenso zu einander wie die positive y Axe zur positiven z Axe, im zweiten Falle umgekehrt. Daher ist die Functionaldeterminante im ersten Falle positiv, im zweiten negativ. Und der Ausdruck

$$\frac{1}{\cos r}\,(dy\, dz)$$

ist immer positiv. Er gibt den Inhalt des unendlich kleinen Parallelogramms auf der Fläche. Um also den Inhalt der Fläche selbst zu erhalten, hat man das Doppelintegral

$$S = \iint \frac{1}{\cos r}\,(dy\,dz)$$

über die ganze Fläche zu erstrecken.

Soll dieser Inhalt ein Minimum sein, so ist die erste Variation des Doppelintegrals $= 0$ zu setzen. Man erhält

$$\iint \frac{\frac{dx}{dy}\cdot\frac{d\delta x}{dy} + \frac{dx}{dz}\cdot\frac{d\delta x}{dz}}{\pm\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2+\left(\frac{dx}{dz}\right)^2}}\,(dy\,dz) = 0,$$

und es gilt das obere oder das untere Zeichen vor der Wurzel, je nachdem $(dy\,dz)$ positiv oder negativ ist. Die linke Seite lässt sich schreiben

$$\iint \frac{d}{dy}\,(-\sin r\;\cos\varphi\,.\,\delta x)\,.\,(dy\,dz) + \iint \frac{d}{dz}\,(-\sin r\;\sin\varphi\,.\,\delta x)\,.\,(dy\,dz)$$

$$-\iint \delta x\,.\,\frac{d}{dy}\,(-\sin r\;\cos\varphi)\,.\,(dy\,dz) - \iint \delta x\,.\,\frac{d}{dz}\,(-\sin r\;\sin\varphi)\,.\,(dy\,dz).$$

Die beiden ersten Integrale reduciren sich auf einfache Integrale, die in der Richtung der wachsenden q durch die Begrenzung der Fläche zu nehmen sind, nemlich

$$\int \delta x\,.\,(-\sin r\;\cos\varphi\;dz + \sin r\;\sin\varphi\;dy).$$

Der Werth ist $= 0$, da in der Begrenzung $\delta x = 0$ ist. Die Bedingung des Minimum lautet also

$$\iint \delta x\left(\frac{d\,(\sin r\;\cos\varphi)}{dy} + \frac{d\,(\sin r\;\sin\varphi)}{dz}\right)(dy\,dz) = 0.$$

Sie wird erfüllt, wenn

(2) $$-\sin r\;\sin\varphi\;dy + \sin r\;\cos\varphi\;dz = d\mathfrak{x}$$

ein vollständiges Differential ist.

5.

Die Coordinaten r und φ auf der Kugel lassen sich ersetzen durch eine complexe Grösse $\eta = tg\,\frac{r}{2}\,.\,e^{\varphi i}$, deren geometrische Bedeutung leicht zu erkennen ist. Legt man nemlich an die Kugel im Pol eine Tangentialebene, deren positive Seite von der Kugel abgekehrt ist, und zieht vom Gegenpol eine Gerade durch den Punkt (r, φ), so trifft diese die Tangentialebene in einem Punkte, der die complexe Grösse 2η repräsentirt. Dem Pol entspricht $\eta = 0$, dem Gegenpol $\eta = \infty$. Für die Punkte, welche die Richtungen der positiven y und z Axe angeben, ist $\eta = +1$ und resp. $= +i$.

Führt man noch die complexen Grössen $\eta' = tg\,\frac{r}{2}\,.\,e^{-\varphi i}$, $s = y + zi$, $s' = y - zi$ ein, so gehen die Gleichungen (1) und (2) über in folgende:

$$(1^*) \qquad (1 - \eta\eta')\,dx + \eta'\,ds + \eta\,ds' = 0,$$

$$(2^*) \qquad (1 + \eta\eta')\,d\mathfrak{x}i - \eta'\,ds + \eta\,ds' = 0.$$

Diese lassen sich durch Addition und Subtraction verbinden. Dabei werde $x + \mathfrak{x}i = 2\,X$, $x - \mathfrak{x}i = 2\,X'$ gesetzt, so dass umgekehrt $x = X + X'$ ist. Das Problem findet dann seinen analytischen Ausdruck in den beiden Gleichungen

$$(3) \qquad ds - \eta\,dX + \frac{1}{\eta'}\,dX' = 0,$$

$$(4) \qquad ds' + \frac{1}{\eta}\,dX - \eta'\,dX' = 0.$$

Betrachtet man X und X' als unabhängige Variable und stellt die Bedingungen dafür auf, dass ds und ds' vollständige Differentiale sind, so findet sich

$$\frac{d\eta}{dX'} = 0, \quad \frac{d\eta'}{dX} = 0,$$

d. h. es ist η nur von X, η' nur von X' abhängig, und deshalb umgekehrt X eine Function nur von η, X' eine Function nur von η'.

Hiernach ist die Aufgabe darauf zurückgeführt, η als Function der complexen Variabeln X oder umgekehrt X als Function der complexen Variabeln η so zu bestimmen, dass zugleich den Grenzbedingungen Genüge geleistet werde. Kennt man η als Function von X, so ergibt sich daraus η', indem man in dem Ausdrucke von η jede complexe Zahl in die conjugirte verwandelt. Alsdann hat man nur noch die Gleichungen (3) und (4) zu integriren, um die Ausdrücke für s und s' zu erlangen. Aus diesen erhält man endlich durch Elimination von η eine Gleichung zwischen x, y, z, die Gleichung der Minimalfläche.

6.

Sind die Gleichungen (3) und (4) integrirt, so lässt sich auch der Inhalt der Minimalfläche selbst leicht angeben, nemlich

$$S = \iint \frac{1}{\cos r}\,(dy\,dz) = \iint \frac{1 + \eta\eta'}{1 - \eta\eta'}\,(dy\,dz).$$

Die Functionaldeterminante $(dy\,dz)$ formt sich in folgender Weise um

$$\begin{aligned}(dy\,dz) &= \left(\frac{dy}{ds}\cdot\frac{dz}{ds'} - \frac{dy}{ds'}\cdot\frac{dz}{ds}\right)(ds\,ds') \\ &= \frac{i}{2}\,(ds\,ds') \\ &= \frac{i}{2}\left(\eta\eta' - \frac{1}{\eta\eta'}\right)\frac{dx}{d\eta}\,\frac{dx}{d\eta'}\,(d\eta\,d\eta').\end{aligned}$$

Danach erhält man

$$\begin{aligned}2\,i\,S &= \iint\left(2 + \eta\eta' + \frac{1}{\eta\eta'}\right)\frac{dx}{d\eta}\cdot\frac{dx}{d\eta'}\,(d\eta\,d\eta') \\ &= \iint\left(2\,\frac{dx}{d\eta}\,\frac{dx}{d\eta'} + \frac{ds}{d\eta}\,\frac{ds'}{d\eta'} + \frac{ds}{d\eta'}\,\frac{ds'}{d\eta}\right)(d\eta\,d\eta') \\ &= 2\iint\left(\frac{dx}{d\eta}\,\frac{dx}{d\eta'} + \frac{dy}{d\eta}\,\frac{dy}{d\eta'} + \frac{dz}{d\eta}\,\frac{dz}{d\eta'}\right)(d\eta\,d\eta').\end{aligned}$$

Zur weiteren Umformung dieses Ausdruckes kann man y aus Y und Y', z aus Z und Z' ebenso zusammensetzen wie x aus X und X', so dass die Gleichungen gelten

$$X = \int \frac{dx}{d\eta}\, d\eta,\ X' = \int \frac{dx}{d\eta'}\, d\eta',$$

$$Y = \int \frac{dy}{d\eta}\, d\eta,\ Y' = \int \frac{dy}{d\eta'}\, d\eta',$$

$$Z = \int \frac{dz}{d\eta}\, d\eta,\ Z' = \int \frac{dz}{d\eta'}\, d\eta'.$$

$$x = X + X',\ \mathfrak{x} i = X - X',$$
$$y = Y + Y',\ \mathfrak{y} i = Y - Y',$$
$$z = Z + Z',\ \mathfrak{z} i = Z - Z'.$$

Alsdann erhält man schliesslich

$$(5)\qquad S = -i \iint [(dX\, dX') + (dY\, dY') + (dZ\, dZ')]$$
$$= 2 \iint [(dx\, d\mathfrak{x}) + (dy\, d\mathfrak{y}) + (dz\, d\mathfrak{z})].$$

7.

Die Minimalfläche und ihre Abbildungen auf der Kugel wie in den Ebenen, deren Punkte resp. die complexen Grössen η, X, Y, Z repräsentiren, sind einander in den kleinsten Theilen ähnlich. Man erkennt dies sofort, wenn man das Quadrat des Linearelementes in diesen Flächen ausdrückt. Dasselbe ist

auf der Kugel	$\sin r^2\, d\log \eta\, d\log \eta'$,
in der Ebene der η	$d\eta\, d\eta'$
in der Ebene der X	$\frac{dx}{d\eta} \cdot \frac{dx}{d\eta'}\, d\eta\, d\eta'$,
in der Ebene der Y	$\frac{dy}{d\eta} \cdot \frac{dy}{d\eta'}\, d\eta\, d\eta'$,
in der Ebene der Z	$\frac{dz}{d\eta} \cdot \frac{dz}{d\eta'}\, d\eta\, d\eta'$.

in der Minimalfläche selbst

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = (dX + dX')^2 + (dY + dY')^2 + (dZ + dZ')^2$$
$$= 2\,(dX\,dX' + dY\,dY' + dZ\,dZ')$$
$$= 2\left(\frac{dx}{d\eta}\cdot\frac{dx}{d\eta'} + \frac{dy}{d\eta}\cdot\frac{dy}{d\eta'} + \frac{dz}{d\eta}\cdot\frac{dz}{d\eta'}\right) d\eta\, d\eta'.$$

Es ist nemlich nach den Gleichungen (3) und (4), wenn man darin η und η' als unabhängige Variable ansieht:

$$\eta\frac{dx}{d\eta} = \frac{dz}{d\eta} = -\eta^2\frac{dz'}{d\eta},$$
$$\eta'\frac{dx}{d\eta'} = \frac{dz'}{d\eta'} = -\eta'^2\frac{dz}{d\eta'},$$

und deshalb

$$dX^2 + dY^2 + dZ^2 = 0,$$
$$dX'^2 + dY'^2 + dZ'^2 = 0.$$

Das Verhältnis von irgend zwei der obigen quadrirten Linearelemente ist unabhängig von $d\eta$ und $d\eta'$, d. h. von der Richtung des Elementes, und darin beruht die in den kleinsten Theilen ähnliche Abbildung. Da die Linearvergrösserung bei der Abbildung in irgend einem Punkte nach allen Richtungen dieselbe ist, so erhält man die Flächenvergrösserung gleich dem Quadrat der Linearvergrösserung. Das Quadrat des Linearelementes in der Minimalfläche ist aber gleich der doppelten Summe der Quadrate der entsprechenden Linearelemente in den Ebenen der X, der Y und der Z. Daher ist auch das Flächenelement in der Minimalfläche gleich der doppelten Summe der entsprechenden Flächenelemente in jenen Ebenen. Dasselbe gilt von der ganzen Fläche und ihren Abbildungen in den Ebenen der X, Y, Z.

8.

Eine wichtige Folgerung lässt sich noch aus dem Satze von der Aehnlichkeit in den kleinsten Theilen ziehen, wenn man eine neue com-

plexe Variable η_1 dadurch einführt, dass man auf der Kugel den Pol in einen beliebigen Punkt ($\eta = \alpha$) verlegt und den Anfangsmeridian beliebig wählt. Hat dann η_1 für das neue Coordinatensystem dieselbe Bedeutung wie η für das alte, so kann man jetzt ein unendlich kleines Dreieck auf der Kugel sowohl in der Ebene der η als in der der η_1 abbilden. Die beiden Bilder sind dann auch Abbildungen von einander und in den kleinsten Theilen ähnlich. Für den Fall der directen Aehnlichkeit ergibt sich ohne Weiteres, dass $\frac{d\eta_1}{d\eta}$ unabhängig ist von der Richtung der Verschiebung von η, d. h. dass η_1 eine Function der complexen Variabeln η ist. Den Fall der inversen (symmetrischen) Aehnlichkeit kann man auf den vorigen zurückführen, indem man statt η_1 die conjugirte complexe Grösse nimmt. Um nun η_1 als Function von η auszudrücken, hat man zu beachten, dass $\eta_1 = 0$ ist in dem einen Punkte der Kugel, für welchen $\eta = \alpha$, und $\eta_1 = \infty$ in dem diametral gegenüberliegenden Punkte, d. h. für $\eta = -\frac{1}{\alpha'}$. Danach ergibt sich $\eta_1 = c\,\frac{\eta - \alpha}{1 + \alpha'\eta}$. Zur Bestimmung der Constanten c dient die Bemerkung, dass, wenn $\eta_1 = \beta$ ist für $\eta = 0$, daraus $\eta_1 = -\frac{1}{\beta'}$ gefunden wird für $\eta = \infty$. Es ist also $\beta = -c\alpha$ und $-\frac{1}{\beta'} = \frac{c}{\alpha'}$, d. h. $\beta = -\frac{\alpha}{c'}$. Hieraus ergibt sich $cc' = 1$ und daher $c = e^{\theta i}$ für ein reelles θ. Die Grössen α und θ können beliebige Werthe erhalten: α hängt von der Lage des neuen Pols, θ von der Lage des neuen Anfangsmeridians ab. Diesem neuen Coordinatensystem auf der Kugel entsprechen die Richtungen der Axen eines neuen rechtwinkligen Systems. Es mögen in dem neuen System x_1, s_1, s'_1 dasselbe bezeichnen wie x, s, s' in dem alten. Dann erlangt man die Transformationsformeln

$$
\begin{aligned}
(1 + \alpha\alpha')\, x_1 &= (1 - \alpha\alpha')\, x + \alpha' s + \alpha s', \\
(1 + \alpha\alpha')\, s_1 . e^{-\theta i} &= -2\,\alpha x + s - \alpha^2 s', \\
(1 + \alpha\alpha')\, s'_1 . e^{\theta i} &= -2\,\alpha' x - \alpha'^2 s + s'.
\end{aligned}
$$

Diese Formeln und der Ausdruck für η vereinfachen sich für $\theta = \pi$. Man erhält

$$\eta_1 = \frac{\alpha - \eta}{1 + \alpha\eta},$$

$$\begin{aligned} (6) \qquad (1 + \alpha\alpha')\, x_1 &= (1 - \alpha\alpha')\, x + \alpha' s + \alpha s', \\ (1 + \alpha\alpha')\, s_1 &= 2\,\alpha x - s + \alpha^2 s', \\ (1 + \alpha\alpha')\, s'_1 &= 2\,\alpha' x + \alpha'^2 s - s'. \end{aligned}$$

9.

Für die meisten Anwendungen, die von der Transformation der Coordinaten gemacht werden sollen, genügt es, den letzten specielleren Fall zu nehmen. Für diesen erhält man

$$\left(\frac{d\eta_1}{d\eta}\right)^2 \cdot \frac{dx_1}{d\eta_1} = \frac{\eta_1}{\eta}\frac{dx}{d\eta}$$

oder

$$(d \log \eta_1)^2 \cdot \frac{dx_1}{d \log \eta_1} = (d \log \eta)^2 \cdot \frac{dx}{d \log \eta}\,.$$

Hiernach empfiehlt es sich, eine neue complexe Grösse u einzuführen, welche durch die Gleichung definirt wird

$$(7) \qquad u = \int \sqrt{i \frac{dx}{d \log \eta}} \cdot d \log \eta$$

und die von der Lage des Coordinatensystems (x, y, z) unabhängig ist. Gelingt es dann, u als Function von η zu bestimmen, so erhält man

$$(8) \qquad x = -\, i \int \left(\frac{du}{d \log \eta}\right)^2 d \log \eta + i \int \left(\frac{du'}{d \log \eta'}\right)^2 d \log \eta'$$

x ist der Abstand des zu η gehörigen Punktes der Minimalfläche von einer Ebene, die durch den Anfangspunkt der Coordinaten rechtwinklig zur Richtung $\eta = 0$ gelegt ist. Man erhält den Abstand desselben

Punktes der Minimalfläche von einer durch den Anfangspunkt der Coordinaten gelegten Ebene, die rechtwinklig auf der Richtung $\eta = \alpha$ steht, indem man in (8) $\frac{\alpha - \eta}{1 + \alpha' \eta}$ statt η setzt. Speciell also für $\alpha = 1$ und $\alpha = i$

$$(9) \quad y = -\frac{i}{2}\int \left(\frac{du}{d\log\eta}\right)^2 \cdot \left(\eta - \frac{1}{\eta}\right) d\log\eta + \frac{i}{2}\int \left(\frac{du'}{d\log\eta'}\right)^2 \cdot \left(\eta' - \frac{1}{\eta'}\right) d\log\eta'.$$

$$(10) \quad z = -\frac{1}{2}\int \left(\frac{du}{d\log\eta}\right)^2 \cdot \left(\eta + \frac{1}{\eta}\right) d\log\eta - \frac{1}{2}\int \left(\frac{du'}{d\log\eta'}\right)^2 \cdot \left(\eta' + \frac{1}{\eta'}\right) d\log\eta'.$$

10.

Die Grösse u ist als Function von η zu bestimmen, d. h. als einwerthige Function des Ortes in derjenigen Fläche, welche, über die η Ebene ausgebreitet, die Minimalfläche in den kleinsten Theilen ähnlich abbildet. Daher kommt es vor allen Dingen auf die Unstetigkeiten und Verzweigungen in dieser Abbildung an. Bei der Untersuchung derselben hat man Punkte im Innern der Fläche von Begrenzungspunkten zu unterscheiden.

Handelt es sich um einen Punkt im Innern der Minimalfläche, so legt man in ihn den Anfangspunkt des Coordinatensystems (x, y, z), die Axe der positiven x in die positive Normale, folglich die yz Ebene tangential. Dann fehlen in der Entwicklung von x das freie Glied und die in y und z multiplicirten Glieder. Durch geeignet gewählte Richtung der y und der z Axe kann man auch das in yz multiplicirte Glied verschwinden lassen. Die Bedingung des Minimum führt bei diesem Coordinatensystem auf die partielle Differentialgleichung $\frac{d^2x}{dy^2} + \frac{d^2x}{dz^2} = 0$. Das Krümmungsmass ist also negativ, die Haupt-Krümmungsradien sind einander entgegengesetzt gleich. Die Tangentialebene theilt die Fläche in vier Quadranten, wenn die Krümmungshalbmesser nicht ∞ sind. Diese Quadranten liegen abwechselnd über und unter der Tangential-

ebene. Beginnt die Entwicklung von x erst mit den Gliedern $n$ter Ordnung ($n > 2$), so sind die Krümmungsradien ∞, und die Tangentialebene theilt die Fläche in $2n$ Sectoren, die abwechselnd über und unter jener Ebene liegen und von den Krümmungslinien halbirt werden.

Will man nun X als Function der complexen Variabeln Y ansehen, so ergibt sich in dem Falle der vier Sectoren

$$\log X = 2 \log Y + \mathit{funct.\ cont.},$$

in dem Falle der $2n$ Sectoren

$$\log X = n \log Y + f.\ c.$$

Und da nach (8) und (9) $\dfrac{dX}{dY} = \dfrac{-2\eta}{1-\eta\eta}$ ist, so beginnt die Entwicklung von η im ersten Falle mit der ersten, im zweiten mit der $(n-1)$ten Potenz von Y. Umgekehrt wird also, wenn Y als Function von η angesehen werden soll, die Entwicklung im ersten Falle nach ganzen Potenzen von η, im zweiten nach ganzen Potenzen von $\eta^{\frac{1}{n-1}}$ fortschreiten. D. h. die Abbildung auf der η Ebene hat an der betreffenden Stelle keinen oder einen $(n-2)$fachen Verzweigungspunkt, je nachdem der erste oder der zweite Fall eintritt.

Was u betrifft, so ergibt sich $\dfrac{du}{d \log Y} = \dfrac{du}{d \log \eta} \cdot \dfrac{d \log \eta}{d \log Y}$, also mit Hülfe der Gleichung (9)

$$\left(\frac{du}{d \log Y}\right)^2 = -2i \frac{dY}{d\eta} \cdot \frac{\eta^2}{1-\eta^2} \cdot \left(\frac{d\eta}{dY}\right)^2 \cdot \frac{Y^2}{\eta^2}.$$

Demnach ist in einem $(n-2)$fachen Verzweigungspunkte der Abbildung auf der η Ebene

$$\log \frac{du}{d \log Y} = \frac{n}{2} \log Y + f.\ c. \text{ oder}$$

$$\log \frac{du}{dY} = \left(\frac{n}{2} - 1\right) \log Y + f.\ c.$$

11.

Die weitere Untersuchung soll zunächst auf den Fall beschränkt werden, dass die gegebene Begrenzung aus geraden Linien besteht. Dann lässt sich die Abbildung der Begrenzung auf der η Ebene wirklich herstellen. Die in irgend welchen Punkten einer geraden Begrenzungslinie errichteten Normalen liegen in parallelen Ebenen, und daher ist die Abbildung auf der Kugel ein grösster Kreis.

Um einen Punkt im Innern einer geraden Begrenzungslinie zu untersuchen, legt man wie vorher in ihn den Anfangspunkt der Coordinaten, die positive x Axe in die positive Normale. Dann fällt die ganze Begrenzungslinie in die yz Ebene. Der reelle Theil von X ist demnach in der ganzen Begrenzungslinie $= 0$. Geht man also durch das Innere der Minimalfläche um den Anfangspunkt der Coordinaten herum von einem vorangehenden bis zu einem nachfolgenden Begrenzungspunkte, so muss dabei das Argument von X sich ändern um $n\pi$, ein ganzes Vielfaches von π. Das Argument von Y ändert sich gleichzeitig um π. Man hat also, wie vorher

$$\log X = n \log Y + f.\ c.$$

$$\log \eta = (n-1) \log Y + f.\ c.$$

$$\log \frac{du}{dY} = \left(\frac{n}{2} - 1\right) \log Y + f.\ c.$$

Dem betrachteten Begrenzungspunkte entspricht ein $(n-2)$facher Verzweigungspunkt in der Abbildung auf der η Ebene. In dieser Abbildung macht das auf den Punkt folgende Begrenzungsstück mit dem ihm vorhergehenden den Winkel $(n-1)\pi$.

12.

Bei dem Uebergange von einer Begrenzungslinie zur folgenden hat man zwei Fälle zu unterscheiden. Entweder treffen sie zusammen in einem im Endlichen liegenden Schnittpunkte, oder sie erstrecken sich ins Unendliche.

Im ersten Falle sei $\alpha\pi$ der im Innern der Minimalfläche liegende Winkel der beiden Begrenzungslinien. Legt man den Anfangspunkt der Coordinaten in den zu untersuchenden Eckpunkt, die positive x Axe in die positive Normale, so ist in beiden Begrenzungslinien der reelle Theil von $X = 0$. Beim Uebergange von der ersten Begrenzungslinie zur folgenden ändert sich also das Argument von X um $m\pi$, ein ganzes Vielfaches von π, das Argument von Y um $\alpha\pi$. Man hat daher

$$\frac{\alpha}{m} \log X = \log Y + f.\ c.$$

$$\left(1 - \frac{\alpha}{m}\right) \log X = \log \eta + f.\ c.$$

$$\log \frac{du}{dY} = \left(\frac{m}{2\alpha} - 1\right) \log Y + f.\ c.$$

Erstreckt sich die Fläche zwischen zwei auf einander folgenden Begrenzungsgeraden ins Unendliche, so legt man die positive x Axe in ihre kürzeste Verbindungslinie, parallel der positiven Normalen im Unendlichen. Die Länge der kürzesten Verbindungslinie sei A, und $\alpha\pi$ der Winkel, welchen die Projection der Minimalfläche in der yz Ebene ausfüllt. Dann bleiben die reellen Theile von X und $i \log \eta$ im Unendlichen endlich und stetig und nehmen in den begrenzenden Geraden constante Werthe an. Hieraus ergibt sich (für $y = \infty$, $z = \infty$)

$$X = -\frac{Ai}{2\alpha\pi} \log \eta + f.\ c.$$

$$u = \sqrt{\frac{A}{2\alpha\pi}} \log \eta + f.\ c.$$

$$Y = -\frac{Ai}{4\alpha\pi} \cdot \frac{1}{\eta} + f.\ c.$$

Legt man die x_1 Axe eines Coordinatensystems in eine begrenzende Gerade, die x_2 Axe eines andern Systems in die zweite begrenzende Gerade u. s. f., so ist in der ersten Linie $\log \eta_1$, in der zweiten $\log \eta_2$ u. s. f. rein imaginär, da die Normale zu der betreffenden Axe der x_1,

der x_2 u. s. f. senkrecht steht. Es ist also $i\,\frac{dx_1}{d\log\eta_1}$ in der ersten Begrenzungslinie reell, $i\,\frac{dx_2}{d\log\eta_2}$ in der zweiten u. s. f. Da aber auch für ein beliebiges Coordinatensystem (x, y, z) immer

$$\sqrt{i\,\frac{dx}{d\log\eta}}\cdot d\log\eta = \sqrt{i\,\frac{dx_1}{d\log\eta_1}}\cdot d\log\eta_1 = \sqrt{i\,\frac{dx_2}{d\log\eta_2}}\cdot d\log\eta_2 \ldots$$

ist, so findet sich, dass in jeder geraden Begrenzungslinie

$$du = \sqrt{i\,\frac{dx}{d\log\eta}}\,d\log\eta$$

entweder reelle oder rein imaginäre Werthe besitzt.

13.

Die Minimalfläche ist bestimmt, sobald man eine der Grössen u, η, X, Y, Z durch eine der übrigen ausgedrückt hat. Dies gelingt in vielen Fällen. Besondere Beachtung verdienen darunter diejenigen, in welchen $\frac{du}{d\log\eta}$ eine algebraische Function von η ist. Dazu ist nöthig und hinreichend, dass die Abbildung auf der Kugel und ihre symmetrischen und congruenten Fortsetzungen eine geschlossene Fläche bilden, welche die ganze Kugel einfach oder mehrfach bedeckt.

Im Allgemeinen aber wird es schwierig sein, direct eine der Grössen u, η, X, Y, Z durch eine der übrigen auszudrücken. Statt dessen kann man aber auch jede von ihnen als Function einer neuen zweckmässig gewählten unabhängigen Variablen bestimmen. Wir führen eine solche unabhängige Variable t ein, dass die Abbildung der Fläche auf der t Ebene die halbe unendliche Ebene einfach bedeckt, und zwar diejenige Hälfte, für welche der imaginäre Theil von t positiv ist. In der That ist es immer möglich, t als Function von u (oder von irgend einer der übrigen Grössen η, X, Y, Z) in der Fläche so zu bestimmen, dass

der imaginäre Theil in der Begrenzung $= 0$ ist, und dass sie in einem beliebigen Begrenzungspunkte ($u = b$) unendlich von der ersten Ordnung wird, d. h.

$$t = \frac{const.}{u - b} + f.\ c. \qquad (u = b).$$

Das Argument des Factors von $\frac{1}{u-b}$ ist durch die Bedingung bestimmt, dass der imaginäre Theil von t in der Begrenzung $= 0$, im Innern der Fläche positiv sein soll. Es bleibt also in dem Ausdrucke von t nur der Modul dieses Factors und eine additive Constante willkürlich.

Es sei $t = a_1, a_2, \ldots$ für die Verzweigungspunkte im Innern der Abbildung auf der η Ebene, $t = b_1, b_2, \ldots$ für die Verzweigungspunkte in der Begrenzung, die nicht Eckpunkte sind, $t = c_1, c_2, \ldots$ für die Eckpunkte, $t = e_1, e_2, \ldots$ für die ins Unendliche sich erstreckenden Sectoren.

Dann hat man

$$\text{für } t = a \qquad \log \frac{du}{dt} = \left(\frac{n}{2} - 1\right) \log (t - a) + f.\ c.,$$

$$\text{,, } t = b \qquad \log \frac{du}{dt} = \left(\frac{n}{2} - 1\right) \log (t - b) + f.\ c.,$$

$$\text{,, } t = c \qquad \log \frac{du}{dt} = \left(\frac{m}{2} - 1\right) \log (t - c) + f.\ c.,$$

$$\text{,, } t = e \qquad u = \sqrt{\frac{A\alpha}{2\pi}} \log (t - e) + f.\ c.$$

Man kann die Untersuchung auf den Fall $n = 3$, $m = 1$ beschränken, d. h. auf einfache Verzweigungspunkte, und den allgemeinen Fall aus diesem dadurch ableiten, dass man mehrere einfache Verzweigungspunkte zusammenfallen lässt.

Um den Ausdruck für $\frac{du}{dt}$ zu bilden, hat man zu beachten, dass längs der Begrenzung dt reell, du entweder reell oder rein imaginär ist.

Demnach ist $\left(\frac{du}{dt}\right)^2$ reell, wenn t reell ist. Diese Function kann man über die Linie der reellen Werthe von t hinüber stetig fortsetzen, indem man die Bestimmung trifft, dass für conjugirte Werthe t und t' der Variabeln auch die Function conjugirte Werthe haben soll. Alsdann ist $\left(\frac{du}{dt}\right)^2$ für die ganze t Ebene bestimmt und zeigt sich einwerthig.

Es seien $a'_1, a'_2, \ldots$ die conjugirten Werthe zu $a_1, a_2, \ldots,$ und das Product $(t - a_1)(t - a_2)\ldots$ werde mit $\Pi(t - a)$ bezeichnet. Alsdann ist

$$(11) \qquad u = const. + \int \sqrt{\frac{\Pi(t-a)\,\Pi(t-a')\,\Pi(t-b)}{\Pi(t-c)}} \cdot \frac{const.\, dt}{\Pi(t-e)}.$$

Die Constanten a, b, c etc. müssen so bestimmt werden, dass für $t = e \quad u = \sqrt{\frac{A\alpha}{2\pi}}\, log\,(t-e) + f.\,c.$ wird. Damit u für alle Werthe von t ausser a, b, c, e endlich und stetig bleibe, muss für die Anzahl dieser Werthe eine Relation bestehen. Es muss die Differenz der Anzahl der Eckpunkte und der in der Begrenzung liegenden Verzweigungspunkte um 4 grösser sein als die doppelte Differenz der Anzahl der innern Verzweigungspunkte und der ins Unendliche verlaufenden Sectoren. Setzt man zur Abkürzung

$$\Pi(t-a)\,\Pi(t-a')\,\Pi(t-b) = \varphi(t),$$

$$\Pi(t-c)\,\Pi(t-e)^2 = \chi(t),$$

d. h.

$$\frac{du}{dt} = const. \sqrt{\frac{\varphi(t)}{\chi(t)}},$$

so ist die ganze Function $\varphi(t)$ vom Grade $\nu - 4$, wenn $\chi(t)$ vom Grade ν ist.

14.

Es ist noch η als Function von t auszudrücken. Direct gelangt man dazu nur in den einfachsten Fällen. Im Allgemeinen ist der fol-

gende Weg einzuschlagen. Es sei v eine noch näher zu bestimmende Function von t, die als bekannt vorausgesetzt wird. In den Gleichungen (8), (9), (10) kommt es wesentlich an auf $\frac{du}{d\log\eta}$, wofür man schreiben kann $\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{d\log\eta}$. Der letzte Factor lässt sich ansehen als Product der beiden Factoren

$$(12)\qquad k_1 = \sqrt{\frac{dv}{d\eta}},\ k_2 = \eta\sqrt{\frac{dv}{d\eta}},$$

die der Differentialgleichung erster Ordnung genügen

$$(13)\qquad k_1\frac{dk_2}{dv} - k_2\frac{dk_1}{dv} = 1,$$

sowie der Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(14)\qquad \frac{1}{k_1}\cdot\frac{d^2k_1}{dv^2} = \frac{1}{k_2}\cdot\frac{d^2k_2}{dv^2}.$$

Gelingt es also, $\frac{1}{k_1}\cdot\frac{d^2k_1}{dv^2}$ als Function von t auszudrücken, so ersetzt man $\frac{d^2k}{dv^2}$ durch das ihm gleichbedeutende

$$\frac{\frac{dv}{dt}\cdot\frac{d^2k}{dt^2} - \frac{dk}{dt}\cdot\frac{d^2v}{dt^2}}{\left(\frac{dv}{dt}\right)^3}$$

und erhält für k eine homogene lineäre Differentialgleichung zweiter Ordnung. Von dieser sind k_1 und k_2 particuläre Integrale, die durch die Differentialgleichung (13) verbunden sind.

Die Function $\frac{dv}{dt}$ ist so zu wählen, dass die Unstetigkeiten von $\frac{1}{k}\cdot\frac{d^2k}{dv^2}$ für endliche Werthe von t nicht ausserhalb der Punkte

a, a', b, c, e liegen. Setzt man

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\varphi(t)}{\sqrt{\chi(t)}},$$

so wird $\frac{1}{k} \cdot \frac{d^2k}{dv^2}$ im Endlichen nur für die Punkte $t = c_1$, c_2, ... unendlich und zwar für jeden unendlich in erster Ordnung. Man überzeugt sich davon durch folgende Betrachtung. In dem zu $t = c$ gehörigen Eckpunkte auf der Kugelfläche liege der Winkel $\gamma\pi$, und es seien v_c, η_c die Werthe von v und η für $t = c$. Dann hat man für $\lim t - c = 0$

$$v - v_c = 2\varphi(c) \,.\, \chi'(c)^{-\frac{1}{2}} \cdot (t-c)^{\frac{1}{2}},$$

$$\eta - \eta_c = const. \; (t-c)^{\gamma}.$$

Folglich $k_1 = \sqrt{\frac{dv}{d\eta}} = const. \; (v - v_c)^{\frac{1}{2} - \gamma}$ und

$$\frac{1}{k} \cdot \frac{d^2k}{dv^2} = \left(\gamma\gamma - \tfrac{1}{4}\right) \cdot (v - v_c)^{-2}$$

$$= \tfrac{1}{4} \frac{(\gamma\gamma - \frac{1}{4}) \, \chi'(c)}{(t-c) \, \varphi(c)^2}.$$

Durch analoge Betrachtungen erkennt man, dass für die Punkte $t = a$, $t = b$, $t = e$, sowie für alle gewöhnlichen Punkte der t Ebene k_1 und $\frac{1}{k} \frac{d^2k}{dv^2}$ stetig bleiben.

Für $t = \infty$ ist $\frac{d\eta}{dt} = const. \; t^{-2}$, $\frac{dv}{dt} = t^{\frac{\nu}{2} - 4}$, folglich $k_1 = \sqrt{\frac{dv}{d\eta}}$ $= const. \; t^{\frac{\nu}{4} - 1}$. Es bleibt also k_1 und $\frac{1}{k} \cdot \frac{d^2k}{dv^2}$ stetig für $\nu = 4$. Für $\nu > 4$

erhält man

$$\frac{1}{k} \cdot \frac{d^2k}{dv^2} = \left(\frac{\nu}{4} - 1\right) \left(-\frac{\nu}{4} + 2\right) t^{-\nu + 6}.$$

Man hat also

für $\nu = 4$ $$\frac{1}{k} \cdot \frac{d^2k}{dv^2} = \tfrac{1}{4} \Sigma \frac{(\gamma\gamma - \frac{1}{4}) \;\; \chi'(c)}{(t - c)} + h,$$

für $\nu = 5$ $$\frac{1}{k} \cdot \frac{d^2k}{dv^2} = \tfrac{1}{4} \Sigma \frac{(\gamma\gamma - \frac{1}{4}) \;\; \chi'(c)}{(t - c) \; \varphi(c)^2} + \tfrac{5}{16} t + h,$$

für $\nu = 6$ $$\frac{1}{k} \cdot \frac{d^2k}{dv^2} = \tfrac{1}{4} \Sigma \frac{(\gamma\gamma - \frac{1}{4}) \;\; \chi'(c)}{(t - c) \; \varphi(c)^2} + \tfrac{1}{4}.$$

Für $\nu > 6$ müssten die Wurzeln von $\varphi(t) = 0$ und $\chi(t) = 0$ an $\nu - 6$ Bedingungs-Gleichungen geknüpft sein.

Setzt man

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{\sqrt{\varphi(t) \;\; \chi(t)}} = \frac{1}{\sqrt{f(t)}},$$

so wird die Function $\frac{1}{k} \cdot \frac{d^2k}{dv^2}$ im Endlichen unstetig nur für die Punkte a, a', b, c, und zwar für jeden unendlich in erster Ordnung. Man erhält

für $t = c$ $$\frac{1}{k} \cdot \frac{d^2k}{dv^2} = \tfrac{1}{4} \frac{(\gamma\gamma - \frac{1}{4}) \; f'(c)}{(t - c)}$$

und entsprechende Ausdrücke für $t = a, a', b$, in denen nur 2 statt γ und resp. a, a', b statt c zu setzen ist.

Für $t = \infty$ ergibt sich

$$\frac{1}{k} \cdot \frac{d^2k}{dv^2} = \left(-\frac{\nu}{2} + 2\right) \left(\frac{\nu}{2} - 1\right) t^{2\nu - 6}.$$

Demnach lautet der Ausdruck für $\frac{1}{k} \cdot \frac{d^2k}{dv^2}$ wie folgt:

$$\frac{1}{k} \cdot \frac{d^2k}{dv^2} = \tfrac{1}{4} \Sigma \frac{(\gamma\gamma - \frac{1}{4}) \;\; f'(g)}{(t - g)} + F(t).$$

Die Summe bezieht sich auf alle Punkte $g = a, a', b, c$, und es ist bei a, a', b 2 statt γ zu setzen. $F(t)$ ist eine ganze Function vom Grade $(2\nu - 6)$, in der die ersten beiden Coefficienten sich folgendermassen bestimmen. Man bringe dv in die Form

$$dv = \frac{t^{-\nu+4}\,\frac{dt}{tt}}{\sqrt{f(t)\cdot t^{-2\nu+4}}} = t^{-\nu+4}\, dv_1$$

oder kürzer $= \alpha\, dv_1$.

Dann ergibt sich durch Differentiation

$$\frac{d^2}{dv^2}\left[\left(\frac{d\eta}{dv}\right)^{-\frac12}\right] = \alpha^{-\frac32}\cdot\frac{d^2}{dv_1^2}\left[\left(\frac{d\eta}{dv_1}\right)^{-\frac12}\right] + \left(\frac{d\eta}{dv_1}\right)^{-\frac12}\cdot\frac{d^2(\alpha^{\frac12})}{dv^2},$$

folglich

$$\left(\frac{d\eta}{dv}\right)^{\frac12}\cdot\frac{d^2}{dv^2}\left[\left(\frac{d\eta}{dv}\right)^{-\frac12}\right] = \alpha^{-2}\left(\frac{d\eta}{dv_1}\right)^{\frac12}\frac{d^2}{dv_1^2}\left[\left(\frac{d\eta}{dv_1}\right)^{-\frac12}\right] + \alpha^{-\frac12}\frac{d^2(\alpha^{\frac12})}{dv^2},$$

oder

$$\left(\frac{d\eta}{dv_1}\right)^{\frac12}\cdot\frac{d^2}{dv_1^2}\left[\left(\frac{d\eta}{dv_1}\right)^{-\frac12}\right] = t^{-2\nu+8}\cdot\frac{1}{k}\cdot\frac{d^2k}{dv^2} - \alpha^{\frac32}\,\frac{d^2(\alpha^{\frac12})}{dv^2},$$

oder

$$\left(\frac{d\eta}{dv_1}\right)^{\frac12}\cdot\frac{d^2}{dv_1^2}\left[\left(\frac{d\eta}{dv_1}\right)^{-\frac12}\right] = t^{-2\nu+8}\,\Sigma\,\frac14\,\frac{(\gamma\gamma-\frac14)f'(g)}{t-g} + t^{-2\nu+8}F(t) - \alpha^{\frac32}\frac{d^2(\alpha^{\frac12})}{dv^2}.$$

Die Function auf der linken Seite ist endlich für $t = \infty$. Folglich hat man rechts in der Entwicklung von $t^{-2\nu+8}F(t)$ und von $\alpha^{\frac32}\frac{d^2(\alpha^{\frac12})}{dv^2}$ die Coefficienten von t^2 und resp. von t einander gleich zu setzen. Die Entwicklung von $\alpha^{\frac32}\frac{d^2(\alpha^{\frac12})}{dv^2}$ gibt nach einfacher Rechnung

$$\alpha^{\frac32}\frac{d^2(\alpha^{\frac12})}{dv^2} = \frac14\left(-\frac{\nu}{2}+2\right)t^{-\nu+5}\,\frac{d\left(t^{-\nu+2}f(t)\right)}{dt}.$$

Bei dieser Untersuchung ist stillschweigend vorausgesetzt, dass die Werthe a, b, c, e sämmtlich endlich seien. Trifft dies nicht zu, so bedarf die Betrachtung einer geringen Modification.

Beispiele.

15.

Die Begrenzung bestehe aus zwei unendlichen geraden Linien, die nicht in einer Ebene liegen. Ihre kürzeste Verbindungslinie habe die Länge A, und es sei $\alpha\pi$ der Winkel, welchen die Projection der Fläche auf der rechtwinklig gegen jene Verbindungslinie gelegten Ebene ausfüllt.

Nimmt man die kürzeste Verbindungslinie zur x Axe, so hat in jeder der beiden Begrenzungsgeraden x einen constanten Werth. Ebenso ist φ in jeder der beiden Begrenzungsgeraden constant. In unendlicher Entfernung ist die positive Normale für den einen Sector parallel der positiven, für den andern Sector parallel der negativen x Axe. Die Begrenzung bildet sich auf der Kugel in zwei grössten Kreisen ab, die durch die Pole $\eta = 0$ und $\eta = \infty$ gehen und den Winkel $\alpha\pi$ einschliessen.

Hiernach hat man

$$X = -\frac{iA}{2\alpha\pi}\log\eta,$$

$$s = -\frac{iA}{2\alpha\pi}\left(\eta - \frac{1}{\eta'}\right),$$

$$s' = -\frac{iA}{2\alpha\pi}\left(\frac{1}{\eta} - \eta'\right),$$

folglich

$$x = -i \frac{A}{2\alpha\pi} \log\left(\frac{\eta}{\eta'}\right)$$

(a)

$$= -i \frac{A}{2\alpha\pi} \log\left(-\frac{s}{s'}\right).$$

worin man die Gleichung der Schraubenfläche erkennt.

Der Inhalt der Fläche ist unendlich gross. Soll also von einem Minimum die Rede sein, so ist dies so zu verstehen. Der Inhalt jeder andern Fläche von derselben Begrenzung ist ebenfalls unendlich gross. Aber wenn man den Inhalt der Schraubenfläche abzieht, so kann die Differenz endlich sein, und die Schraubenfläche hat die Eigenschaft, dass diese endliche Differenz positiv ausfällt.

In demselben Sinn hat man die Minimal-Eigenschaft immer aufzufassen, wenn die Fläche unendliche Sectoren besitzt.

16.

Die Begrenzung bestehe aus drei geraden Linien, von denen zwei sich schneiden und die dritte zur Ebene der beiden ersten parallel läuft.

Legt man den Anfangspunkt der Coordinaten in den Schnittpunkt der beiden ersten Geraden, die positive x Axe in die negative Normale, so bildet jener Schnittpunkt auf der Kugel sich ab im Punkte $\eta = \infty$. Die Abbildung der beiden ersten Geraden sind grösste Halbkreise, die von $\eta = \infty$ bis $\eta = 0$ laufen. Ihr Winkel sei $\alpha\pi$. Die Abbildung der dritten Linie ist der Bogen eines grössten Kreises, der von $\eta = 0$ ausgeht, an einer gewissen Stelle umkehrt und in sich selbst bis zum Punkte $\eta = 0$ zurückläuft. Dieser Bogen bilde mit den beiden ersten grössten Halbkreisen die Winkel $\beta\pi$ und $\gamma\pi$, so dass $\beta + \gamma = \alpha$ sich ergibt. Um die Abbildung auf der halben t Ebene zu erhalten, setzen wir fest, dass $t = \infty$ sein soll für $\eta = \infty$, dass dem unendlichen Sector zwischen der ersten und dritten Linie $t = b$, dem unendlichen Sector zwi-

schen der zweiten und dritten Linie $t = c$, dem Umkehrpunkte der Normalen auf der dritten Linie $t = a$ entsprechen soll. Dabei sind a, b, c reell und $c > a > b$. Diesen Bestimmungen entspricht $\eta = (t - b)^\beta (t - c)^\gamma$. Der Werth a hängt von b und c ab. Man hat nemlich

$$\frac{d \log \eta}{dt} = \frac{\beta (t - c) + \gamma (t - b)}{(t - b)(t - c)}$$

und dieses muss für den Umkehrpunkt $= 0$ sein, also $a = \dfrac{c\beta + b\gamma}{\beta + \gamma}$. Man hat weiter

$$du = \frac{(t - a)^{\frac{1}{2}}\, dt}{(t - b)(t - c)} \cdot \sqrt{\beta + \gamma},$$

$$\frac{du}{d \log \eta} = \frac{1}{\sqrt{(\beta + \gamma)(t - a)}},$$

$$\left(\frac{du}{d \log \eta}\right)^2 . \, d \log \eta = \frac{dt}{(t - b)(t - c)}.$$

Folglich

$$x = - i \int \frac{dt}{(t - b)(t - c)} + i \int \frac{dt'}{(t' - b)(t' - c)},$$

$$(b) \qquad y = - \frac{i}{2} \int \frac{(t - b)^\beta (t - c)^\gamma - (t - b)^{-\beta} (t - c)^{-\gamma}}{(t - b)(t - c)} dt$$
$$+ \frac{i}{2} \int \frac{(t' - b)^\beta (t' - c)^\gamma - (t' - b)^{-\beta} (t' - c)^{-\gamma}}{(t' - b)(t' - c)} dt',$$

$$z = - \frac{1}{2} \int \frac{(t - b)^\beta (t - c)^\gamma + (t - b)^{-\beta} (t - c)^{-\gamma}}{(t - b)(t - c)} dt$$
$$- \frac{1}{2} \int \frac{(t' - b)^\beta (t' - c)^\gamma + (t' - b)^{-\beta} (t' - c)^{-\gamma}}{(t' - b)(t' - c)} dt'.$$

Ist A der Abstand der dritten Geraden von der Ebene der ersten beiden, so findet sich

$$c - b = \frac{2\alpha\pi}{A}.$$

17.

Die Begrenzung bestehe aus drei einander kreuzenden geraden Linien, deren kürzeste Abstände A, B, C sein mögen. Zwischen je zwei begrenzenden Linien erstreckt sich die Fläche ins Unendliche. Es seien $\alpha\pi$, $\beta\pi$, $\gamma\pi$ die Winkel der Richtungen, in welchen die Grenzlinien des ersten, des zweiten, des dritten Sectors ins Unendliche verlaufen. Setzt man fest, dass für die drei Sectoren der Minimalfläche die Grösse t resp. $= 0, \infty, 1$ sein soll, so erhält man

$$\frac{du}{dt} = \frac{\sqrt{\varphi(t)}}{t(1-t)}.$$

$\varphi(t)$ ist eine ganze Function zweiten Grades. Ihre Coefficienten bestimmen sich daraus, dass

für $t = 0$ $$\frac{du}{d\log t} = \sqrt{\frac{A\alpha}{2\pi}}$$

für $t = \infty$ $$\frac{du}{d\log t} = \sqrt{\frac{B\beta}{2\pi}}$$

für $t = 1$ $$\frac{du}{d\log(1-t)} = \sqrt{\frac{C\gamma}{2\pi}}$$

sein muss.

Danach ergibt sich

$$\varphi(t) = \frac{A\alpha}{2\pi}(1-t) + \frac{C\gamma}{2\pi}t - \frac{B\beta}{2\pi}t(1-t).$$

Je nachdem die Wurzeln der Gleichung $\varphi(t) = 0$ imaginär oder reell sind, hat die Abbildung auf der Kugel einen Verzweigungspunkt im Innern oder zwei Umkehrpunkte der Normalen auf der Begrenzung.

Die Functionen $k_1 = \sqrt{\frac{dv}{d\eta}}$ und $k_2 = \eta \sqrt{\frac{dv}{d\eta}}$ werden nur für die drei Sectoren unstetig, wenn man $\frac{dv}{dt} = \varphi(t)$ nimmt. Und zwar ist die Unstetigkeit von k_1 der Art, dass

für $t = 0$ $\qquad t^{-\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{2}}.\, k_1$

für $t = \infty$ $\qquad t^{-\frac{3}{2}-\frac{\beta}{2}}.\, k_1$

für $t = 1$ $\qquad t^{-\frac{1}{2}+\frac{\gamma}{2}}.\, k_1$

einändrig und verschieden von 0 und ∞ wird. k_1 und k_2 sind particuläre Integrale einer homogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung, die sich ergibt, wenn man $\frac{1}{k} \cdot \frac{d^2k}{dv^2}$ aus seinen Unstetigkeiten als Function von t darstellt und t statt v als unabhängige Variable in $\frac{d^2k}{dv^2}$ einführt. Hat man das particuläre Integral k_1 gefunden, so ergibt sich k_2 aus der Differentialgleichung erster Ordnung

$$(c) \qquad k_1 \frac{dk_2}{dt} - k_2 \frac{dk_1}{dt} = \varphi(t).$$

Das vollständige Integral der homogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung werde mit

$$(d) \qquad k = Q \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2} & -\frac{3}{2}-\frac{\beta}{2} & \frac{1}{2}-\frac{\gamma}{2} \\ \frac{1}{2}+\frac{\alpha}{2} & -\frac{3}{2}+\frac{\beta}{2} & \frac{1}{2}+\frac{\gamma}{2} \end{Bmatrix} t$$

bezeichnet. Diese Function genügt wesentlich denselben Bedingungen, die in der Abhandlung über die Gaussische Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ als

Definition der P-Function ausgesprochen sind *). Sie weicht von der P-Function darin ab, dass die Summe der Exponenten -1 ist, nicht $+1$ wie bei P. k_1 ist derjenige Zweig der Function Q, dem die oberen Exponenten entsprechen.

Man kann die Function Q auch mit Hülfe einer Function P und ihrer ersten Derivirten ausdrücken. Zunächst ist nemlich

$$k = t^{\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2}} (1-t)^{\frac{1}{2} - \frac{\gamma}{2}} \cdot Q \begin{Bmatrix} 0 & \frac{-\alpha-\beta-\gamma-1}{2} & 0 \\ \alpha & \frac{-\alpha+\beta-\gamma-1}{2} & \gamma \end{Bmatrix} t .$$

Setzt man nun

$$\sigma = P \begin{Bmatrix} 0 & \frac{-\alpha-\beta-\gamma+1}{2} & 0 \\ \alpha & \frac{-\alpha+\beta-\gamma+1}{2} & \gamma \end{Bmatrix} t ,$$

so lassen sich die Constanten a, b, c so bestimmen, dass

$$(e) \qquad k = t^{\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2}} (1-t)^{\frac{1}{2} - \frac{\gamma}{2}} \left((a + bt)\, \sigma + ct\,(1-t)\, \frac{d\sigma}{dt} \right)$$

wird. In der That hat man nur diesen Ausdruck in die Differentialgleichung (c) einzusetzen und die Differentialgleichung zweiter Ordnung für σ zu beachten, um zu der Gleichung zu gelangen

$$\varphi(t) = t^{1-\alpha} (1-t)^{1-\gamma} \left(\sigma_1 \frac{d\sigma_2}{dt} - \sigma_2 \frac{d\sigma_1}{dt} \right) . F(t),$$

$$F(t) = a\,(a + c\alpha)\,(1-t) + (a+b)\,(a+b-c\gamma)\,t$$
$$- t\,(1-t) \left(b - \frac{\alpha+\beta+\gamma-1}{2}\, c \right) \left(b - \frac{\alpha-\beta+\gamma-1}{2}\, c \right).$$

---

*) Beiträge zur Theorie der durch die Gaussische Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ darstellbaren Functionen. (Abhandlungen der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Bd. 7.)

Vermöge der Eigenschaften der Function σ kann man setzen

$$t^{1-\alpha}(1-t)^{1-\gamma}\left(\sigma_1 \frac{d\sigma_2}{dt} - \sigma_2 \frac{d\sigma_1}{dt}\right) = 1,$$

und folglich muss $F(t) = \varphi(t)$ sein. Hieraus ergeben sich drei Bedingungsgleichungen für a, b, c, die eine sehr einfache Form annehmen, wenn man $a + \frac{\alpha}{2} c = p$, $b - \frac{\alpha + \gamma - 1}{2} c = q$, $a + b - \frac{\gamma}{2} c = -r$ setzt. Die Bedingungsgleichungen lauten dann

$$pp - \alpha\alpha\,(p + q + r)^2 = \frac{A\alpha}{2\pi},$$

$$qq - \beta\beta\,(p + q + r)^2 = \frac{B\beta}{2\pi},$$

$$rr - \gamma\gamma\,(p + q + r)^2 = \frac{C\gamma}{2\pi}.$$

Mit Hülfe der Function

$$\lambda = P\begin{Bmatrix} -\frac{\alpha}{2} & -\frac{\beta}{2} & \frac{1}{2} - \frac{\gamma}{2} & \\ \frac{\alpha}{2} & \frac{\beta}{2} & \frac{1}{2} + \frac{\gamma}{2} & t \end{Bmatrix},$$

deren Zweige λ_1 und λ_2 der Differentialgleichung genügen

$$\lambda_1 \frac{d\lambda_2}{d\log t} - \lambda_2 \frac{d\lambda_1}{d\log t} = 1,$$

kann man k noch einfacher ausdrücken, nemlich

$$(f) \qquad k = t^{\frac{1}{2}}\left((p + qt)\,\lambda + ct\,(1 - t)\,\frac{d\lambda}{dt}\right).$$

Es würde nicht schwer sein, die einzelnen Zweige der Function k in der Form von bestimmten Integralen herzustellen. Der Weg dazu ist in art. VII der Abhandlung über die Function P vorgezeichnet.

In dem besondern Falle, dass die drei begrenzenden geraden Linien den Coordinatenaxen parallel laufen, ist $\alpha = \beta = \gamma = \frac{1}{2}$. Dann erhält man

$$\lambda = P\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & t \end{pmatrix} = \left(\frac{t-1}{t}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot P\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & 0 & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & t \end{pmatrix}.$$

Der Zweig λ_1 dieser Function ist $= \left(\frac{t-1}{t}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \sqrt{t^{\frac{1}{2}} + (t-1)^{\frac{1}{2}}} \cdot const.$, und daraus ergibt sich

$$k_1 = \sqrt{2}\,.\,t^{\frac{1}{4}} (t-1)^{\frac{1}{4}} \sqrt{t^{\frac{1}{2}} + (t-1)^{\frac{1}{2}}} \cdot \left\{p + qt - \frac{c}{4} - \frac{c}{4}\sqrt{t(t-1)}\right\},$$

$$k_2 = -\sqrt{2}\, t^{\frac{1}{4}} (t-1)^{\frac{1}{4}} \sqrt{t^{\frac{1}{2}} - (t-1)^{\frac{1}{2}}} \cdot \left\{p + qt - \frac{c}{4} + \frac{c}{4}\sqrt{t(t-1)}\right\}.$$

Mit Hülfe dieser beiden Functionen lassen sich dX, dY, dZ folgendermassen ausdrücken

$$dX = -\, i\, k_1\, k_2 \frac{dt}{t^2(1-t)^2},$$

$$dY = -\frac{i}{2}(k_2^2 \quad k_1^2)\frac{dt}{t^2(1-t)^2},$$

$$dZ = -\frac{1}{2}(k_2^2 + k_1^2)\frac{dt}{t^2(1-t)^2}.$$

$$iX = (p+q-r)^2 \sqrt{\frac{t}{t-1}} + (-p+q+r)^2 \sqrt{\frac{t-1}{t}}$$

$$+ \tfrac{1}{2}(p+3q+r)(p-q+r) \log \frac{t^{\frac{1}{2}} + (t-1)^{\frac{1}{2}}}{t^{\frac{1}{2}} - (t-1)^{\frac{1}{2}}},$$

$$(g) \quad iY = -(p-q+r)^2 t^{\frac{1}{2}} - (-p+q+r)^2 t^{-\frac{1}{2}}$$

$$- \tfrac{1}{2}(p+q+3r)(p+q-r) \log \frac{1+t^{\frac{1}{2}}}{1-t^{\frac{1}{2}}},$$

$$iZ = (p-q+r)^2 (1-t)^{\frac{1}{2}} + (p+q-r)^2 (1-t)^{-\frac{1}{2}}$$

$$+ \tfrac{1}{2}(3p+q+r)(-p+q+r) \log \frac{1+\sqrt{1-t}}{1-\sqrt{1-t}}.$$

Wenn p, q, r reell sind, so geben die doppelten Coefficienten von i in den drei Grössen rechts die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes der Fläche.

18.

Die Begrenzung bestehe aus vier sich schneidenden geraden Linien, die man erhält, wenn von den Kanten eines beliebigen Tetraeders zwei nicht zusammenstossende weggelassen werden. Die Abbildung auf der Kugeloberfläche ist ein sphärisches Viereck, dessen Winkel $\alpha\pi$, $\beta\pi$, $\gamma\pi$, $\delta\pi$ sein mögen. Es ergibt sich

$$du = \frac{dt}{\sqrt{(t-a)(t-b)(t-c)(t-d)}} = \frac{dt}{\sqrt{\Delta(t)}},$$

wenn die reellen Werthe $t = a, b, c, d$ die Punkte der t-Ebene bezeichnen, in welchen sich die Eckpunkte des Vierecks abbilden.

Soll die in §. 14 entwickelte Methode zur Bestimmung von η angewandt werden, so hat man hier speciell $\varphi(t) = 1$, $\chi(t) = \Delta(t)$, folglich $v = u$ und $k_1 = \sqrt{\frac{du}{d\eta}}$, $k_2 = \eta\sqrt{\frac{du}{d\eta}}$. Die Functionen k_1 und k_2 genügen der Differentialgleichung

$$k_1 \frac{dk_2}{du} - k_2 \frac{dk_1}{du} = 1$$

und sind particuläre Integrale der Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{4}{k} \cdot \frac{d^2k}{du^2} = \frac{(\alpha\alpha - \frac{1}{4})\Delta'(a)}{t-a} + \frac{(\beta\beta - \frac{1}{4})\Delta'(b)}{t-b} + \frac{(\gamma\gamma - \frac{1}{4})\Delta'(c)}{t-c} + \frac{(\delta\delta - \frac{1}{4})\Delta'(d)}{t-d} + h.$$

In dieser Gleichung hat man auf der linken Seite t als unabhängige Variable einzuführen und erhält

$$(h) \qquad \frac{4}{k}\left(\Delta(t)\frac{d^2k}{dt^2} + \frac{1}{2}\Delta'(t)\frac{dk}{dt}\right)$$

$$= \frac{(\alpha\alpha - \frac{1}{4})\Delta'(a)}{t-a} + \frac{(\beta\beta - \frac{1}{4})\Delta'(b)}{t-b} + \frac{(\gamma\gamma - \frac{1}{4})\Delta'(c)}{t-c} + \frac{(\delta\delta - \frac{1}{4})\Delta'(d)}{t-d} + h$$

als die Differentialgleichung zweiter Ordnung, welcher k Genüge leisten muss.

Das Integral dieser Differentialgleichung wird die Constante h mit enthalten. Es wird also auch h in dem Ausdrucke vorkommen, welcher η als Function von t gibt. Nun ist das sphärische Viereck, und folglich auch der Werth von η in den Eckpunkten, ursprünglich festgelegt durch fünf unabhängige Grössen. Man hat also schliesslich mit Hülfe jener fünf unabhängigen Grössen der Constanten h einen solchen Werth beizulegen, dass in den Eckpunkten ($t = a, b, c, d$) η die richtigen Werthe erhalte.

In dem speciellen Falle eines regulären Tetraeders ist die Abbildung auf der Kugel ein regelmässiges Viereck, in welchem jeder Winkel $= \frac{2}{3}\pi$. Die Diagonalen halbiren sich und stehen rechtwinklig auf einander. Die den Eckpunkten diametral gegenüberliegenden Punkte der

Kugeloberfläche sind die Ecken eines congruenten Vierecks. Zwischen beiden liegen vier dem ursprünglichen ebenfalls congruente Vierecke, die je zwei Eckpunkte mit dem ursprünglichen, zwei mit dem gegenüberliegenden gemein haben. Diese sechs Vierecke füllen die Kugeloberfläche einfach aus. Es wird also $\frac{du}{d \log \eta}$ eine algebraische Function von η sein.

Man kann die gesuchte Minimalfläche über ihre ursprüngliche Begrenzung dadurch stetig fortsetzen, dass man sie um jede ihrer Grenzlinien als Drehungsaxe um 180° dreht. Längs einer solchen Grenzlinie haben dann die ursprüngliche Fläche und die Fortsetzung gemeinschaftliche Normalen. Wiederholt man die Construction an den neuen Flächentheilen, so lässt sich die ursprüngliche Fläche beliebig weit fortsetzen. Welche Fortsetzung man aber auch betrachte, immer bildet sie sich auf der Kugel in einem der sechs congruenten Vierecke ab. Und zwar haben die Abbildungen von zwei Flächentheilen eine Seite gemein oder sie liegen einander gegenüber, je nachdem die Flächentheile selbst in einer Grenzlinie an einander stossen oder an gegenüberliegenden Grenzlinien eines mittleren Flächentheils gelegen sind. In dem letzteren Falle können die betreffenden Flächentheile durch parallele Verschiebung zur Deckung gebracht werden. Daher muss $\left(\frac{du}{d \log \eta}\right)^2$ unverändert bleiben, wenn η mit $-\frac{1}{\eta}$ vertauscht wird.

Legt man den Pol ($\eta = 0$) in den Mittelpunkt eines Vierecks, den Anfangsmeridian durch die Mitte einer Seite, so ist für die Eckpunkte dieses Vierecks

$$\eta = tg\,\frac{c}{2} \cdot e^{\pm \frac{\pi i}{4}},\ tg\,\frac{c}{2}\, e^{\pm \frac{3\pi i}{4}}$$

und $tg\,\frac{c}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$. Punkte, denen entgegengesetzte Werthe von η

angehören, haben dieselbe x Coordinate. Es muss also $\left(\frac{du}{d\log\eta}\right)^2$ bei der Vertauschung von η mit $-\eta$ unverändert bleiben. Hiernach erhält man

$$\left(\frac{du}{d\log\eta}\right)^2 = \frac{const.}{\sqrt{\eta^4 + \eta^{-4} + 14}}.$$

Zu demselben Resultate gelangt man auf dem folgenden Wege. Die Substitution

$$\left\{\frac{\eta^2 + \eta^{-2} - 2\sqrt{3}\,i}{\eta^2 + \eta^{-2} + 2\sqrt{3}\,i}\right\}^3 = \left(\frac{t^2-1}{t^2+1}\right)^2$$

liefert auf der t Ebene eine Abbildung, die von einer geschlossenen überall stetig gekrümmten Linie begrenzt wird. Den Eckpunkten $\eta = \pm\, tg\,\frac{c}{2}\, e^{\frac{\pi i}{4}}$ entspricht $t = \pm 1$, den Eckpunkten $\eta = \pm\, tg\,\frac{c}{2}\, e^{\frac{-\pi i}{4}}$ entspricht $t = \pm i$. Geht man an irgend einer dieser vier Stellen durch das Innere der Minimalfläche von einer Grenzlinie zur folgenden, so ändert sich dabei das Argument von t um π. Daher kann man, wie in §. 13., auch hier setzen

$$\frac{du}{dt} = \frac{const.}{\sqrt{(t^2-1)(t^2+1)}}.$$

Dieser Ausdruck stimmt mit dem vorher aufgestellten für $\left(\frac{du}{d\log\eta}\right)^2$. Zur weitern Vereinfachung nehme man

$$\left(\frac{t^2-1}{t^2+1}\right)^2 = \omega^2, \quad \eta^2 + \eta^{-2} = 2\lambda$$

und beachte, dass

$$\left(\frac{du}{d \log \eta}\right)^2 \cdot d \log \eta = \left(\frac{du}{d\lambda}\right)^2 \cdot \frac{d\lambda}{d \log \eta} \cdot d\lambda \cdot$$

Dann ergibt eine sehr einfache Rechnung

$$X = -i \int \left(\frac{du}{d \log \eta}\right)^2 \cdot d \log \eta = C \int \frac{d\omega}{\sqrt{\omega(1-\varrho\omega)(1-\varrho^2\omega)}},$$

$$(i) \quad Y = -\frac{i}{2} \int \left(\frac{du}{d \log \eta}\right)^2 \left(\eta - \frac{1}{\eta}\right) d \log \eta = C\varrho^2 \int \frac{d\omega}{\sqrt{\omega(1-\omega)(1-\varrho^2\omega)}},$$

$$Z = -\frac{1}{2} \int \left(\frac{du}{d \log \eta}\right)^2 \left(\eta + \frac{1}{\eta}\right) d \log \eta = C\varrho \int \frac{d\omega}{\sqrt{\omega(1-\omega)(1-\varrho\omega)}},$$

wenn $\varrho = -\frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})$ eine dritte Wurzel der Einheit bezeichnet. Die Constante C bestimmt sich aus der gegebenen Länge der Tetraederkanten.

19.

Endlich soll noch die Aufgabe der Minimalfläche für den Fall behandelt werden, dass die Begrenzung aus zwei beliebigen Kreisen besteht, die in parallelen Ebenen liegen. Dann kennt man die Richtung der Normalen in der Begrenzung nicht. Daher lässt sich diese auch nicht auf der Kugel abbilden. Man gelangt aber zur Lösung der Aufgabe durch die Annahme, dass alle zu den Ebenen der Grenzkreise parallel gelegten ebenen Schnitte Kreise seien. Und es wird sich zeigen, dass unter dieser Annahme der Minimalbedingung Genüge geleistet werden kann.

Legt man die x Axe rechtwinklig gegen die Ebenen der Grenzkreise, so ist die Gleichung der Schnittcurve in einer parallelen Ebene

$$(k) \qquad F = y^2 + z^2 + 2\alpha y + 2\beta z + \gamma = 0,$$

und α, β, γ sind als Functionen von x zu bestimmen. Zur Abkürzung

werde $\sqrt{\left(\frac{F}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dz}\right)^2} = \frac{1}{n}$ gesetzt, so dass $\cos r = n\,\frac{dF}{dx}$, $\sin r \cos\varphi = n\,\frac{dF}{dy}$, $\sin r \sin\varphi = n\,\frac{dF}{dz}$ ist. Dann lässt sich die Bedingung des Minimum in die Form bringen

$$\frac{d\left(n\,\frac{dF}{dx}\right)}{dx} + \frac{d\left(n\,\frac{dF}{dy}\right)}{dy} + \frac{d\left(n\,\frac{dF}{dz}\right)}{dz} = 0$$

oder nach Ausführung der Differentiation

$$4\frac{d^2F}{dx^2}(F + \alpha^2 + \beta^2 - \gamma) + 4\frac{dF}{dx}\cdot\frac{dF}{dx} - 4\frac{dF}{dx}\cdot\frac{d}{dx}(F + \alpha^2 + \beta^2 - \gamma)$$
$$+ 4\,.\,2\,(F + \alpha^2 + \beta^2 - \gamma) = 0.$$

Schreibt man $\alpha^2 + \beta^2 - \gamma = -q$ und beachtet, dass $F = 0$ ist, so geht die letzte Gleichung über in

$$(I) \qquad q\,\frac{d^2F}{dx^2} - \frac{dF}{dx}\cdot\frac{dq}{dx} + 2q = 0$$

und gibt nach einmaliger Integration

$$\frac{1}{q}\cdot\frac{dF}{dx} + 2\int\frac{dx}{q} + const. = 0.$$

Die Integrationsconstante ist von x unabhängig. Nimmt man andererseits $\int\frac{dx}{q}$ unabhängig von y und z, so muss die Integrationsconstante eine lineäre Function von y und z sein, weil $\frac{1}{q}\,\frac{dF}{dx}$ eine solche ist. Man hat also

$$\frac{1}{q}\cdot\frac{dF}{dx} + 2\int\frac{dx}{q} + 2ay + 2bz + const' = 0.$$

Vergleicht man damit das Resultat der directen Differentiation von F, nemlich

$$\frac{dF}{dx} = 2y\,\frac{d\alpha}{dx} + 2z\,\frac{d\beta}{dx} + \frac{d\gamma}{dx}$$

so ergibt sich

$$\frac{d\alpha}{dx} = -\,aq,\ \frac{d\beta}{dx} = -\,bq$$

und, wenn man $\int q\,dx = m$ setzt: $\alpha = -\,am + d$, $\beta = -\,bm + e$. Hiernach hat man

$$\frac{dF}{dx} = -\,2\,aqy - 2\,b\,qz + \frac{d\gamma}{dx},$$

$$\frac{d^2F}{dx^2} = -\,2\,ay\,\frac{dq}{dx} - 2\,bz\,\frac{dq}{dx} + \frac{d^2\gamma}{dx^2},$$

und diese Ausdrücke sind in die Gleichung (l) einzuführen. Nach gehöriger Hebung erhält man

$$q\,\frac{d^2\gamma}{dx^2} - \frac{dq}{dx}\cdot\frac{d\gamma}{dx} + 2\,q = 0,$$

eine Gleichung, die sich weiter vereinfacht, wenn man beachtet, dass

$$\gamma = q + \alpha^2 + \beta^2 = q + f(m) = \frac{dm}{dx} + f(m).$$

$$f(m) = (a^2 + b^2)\,m^2 - 2\,(ad + be)\,m + d^2 + e^2.$$

Nimmt man hieraus $\frac{d\gamma}{dx}$ und $\frac{d^2\gamma}{dx^2}$, so geht die Differentialgleichung, welche die Bedingung des Minimum ausdrückt, über in folgende.

$$(m)\qquad q\,\frac{d^2q}{dx^2} - \left(\frac{dq}{dx}\right)^2 + 2\,q + 2\,(a^2 + b^2)\,q^3 = 0.$$

Zur Ausführung der Integration setze man $\frac{dq}{dx} = p$ und betrachte q

als unabhängige Variable. Dadurch erhält man für p^2 als Function von q eine lineäre Differentialgleichung erster Ordnung, nemlich

$$\frac{1}{2}\, q \cdot \frac{d(p^2)}{dq} - p^2 + 2q + 2(a^2 + b^2)\, q^3 = 0$$

oder

$$\frac{q^2\, d(p^2) - p^2\, d(q^2)}{q^4} = -\left(\frac{4}{q^2} + 4(a^2 + b^2)\right) dq.$$

Das Integral lautet

$$(n) \qquad \frac{p^2}{q^2} = \frac{4}{q} - 4(a^2 + b^2)\, q + 8c.$$

Darin ist für p wieder $\frac{dq}{dx}$ zu setzen, wodurch man erhält

$$dx = \frac{dq}{2\sqrt{q + 2cq^2 - (a^2 + b^2)\, q^3}},$$

$$dm = \frac{q\, dq}{2\sqrt{q + 2cq^2 - (a^2 + b^2)\, q^3}}.$$

Also ergibt sich

$$(o) \qquad \begin{aligned} x &= \int \frac{dq}{2\sqrt{q + 2cq^2 - (a^2 + b^2)\, q^3}}, \\ m &= \int \frac{q\, dq}{2\sqrt{q + 2cq^2 - (a^2 + b^2)\, q^3}}, \\ y &= am - d + \sqrt{-q}\, \cos\psi, \\ z &= bm - e + \sqrt{-q}\, \sin\psi. \end{aligned}$$

Man hat demnach x, y, z als Functionen von zwei reellen Variabeln q und ψ ausgedrückt. Die Ausdrücke sind, abgesehen von algebraischen Gliedern, elliptische Integrale mit der obern Grenze q. Nach der oben

entwickelten allgemeinen Methode hätte man x, y, z erhalten als Summen von zwei conjugirten Functionen zweier conjugirten complexen Variabeln. Danach liegt die Vermuthung nahe, dass diese complexen Ausdrücke mit Hülfe der Additionstheoreme der elliptischen Functionen sich je in einen einzigen Integralausdruck mit der Variabeln q zusammenziehen lassen.

Und dies ist leicht zu bestätigen. Man hat nemlich aus den Formeln für die Richtungscoordinaten r und φ der Normalen

$$\frac{\eta}{\eta'} = e^{2\varphi i} = \frac{\frac{dF}{dy} + \frac{dF}{dz} i}{\frac{dF}{dy} - \frac{dF}{dz} i} = \frac{y + zi + \alpha + \beta i}{y - zi + \alpha - \beta i} = e^{2\psi i}$$

Verbindet man damit die Definitionsgleichung von q, nemlich:

$$(y + zi + \alpha + \beta i)(y - zi + \alpha - \beta i) = -q,$$

so ergibt sich

$$(y + zi) + (\alpha + \beta i) = (-q)^{\frac{1}{2}} \eta^{\frac{1}{2}} \eta'^{-\frac{1}{2}},$$

$$(y - zi) + (\alpha - \beta i) = (-q)^{\frac{1}{2}} \eta^{-\frac{1}{2}} \eta'^{\frac{1}{2}}.$$

Ferner hat man

$$\operatorname{cotg} r = \frac{\frac{dF}{dx}}{\sqrt{\left(\frac{dF}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dz}\right)^2}} = \frac{1}{2\sqrt{-q}} \{p - 2aq(y+\alpha) - 2bq(z+\beta)\}$$

oder

$$\frac{1}{\sqrt{\eta\eta'}} - \sqrt{\eta\eta'} = \frac{\cos\frac{r^2}{2} - \sin\frac{r^2}{2}}{\sin\frac{r}{2}\cos\frac{r}{2}} = \frac{1}{\sqrt{-q}} \{p - 2aq(y+\alpha) - 2bq(z+\beta)\}$$

Auf der rechten Seite sind für $y + \alpha$ und $z + \beta$ die eben gefundenen Ausdrücke in η und η' einzuführen. Dadurch geht die Gleichung über in folgende:

$$\frac{p}{q} = (-q)^{\frac{1}{2}}\left[(a+bi)\left(\frac{\eta'}{\eta}\right)^{\frac{1}{2}} + (a-bi)\left(\frac{\eta}{\eta'}\right)^{\frac{1}{2}}\right] + (-q)^{-\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\eta\eta'} - \frac{1}{\sqrt{\eta\eta'}}\right).$$

Quadrirt man beide Seiten dieser Gleichung und setzt für $\frac{p^2}{q^2}$ seinen Werth aus (n), so ergibt sich nach gehöriger Reduction

$$(p)\quad \begin{aligned}(-q)&\left[(a+bi)\left(\frac{\eta'}{\eta}\right)^{\frac{1}{2}} - (a-bi)\left(\frac{\eta}{\eta'}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2 + \frac{1}{(-q)}\left[\sqrt{\eta\eta'} + \frac{1}{\sqrt{\eta\eta'}}\right]\\ &= 8c - 2(a+bi)\left(\eta' - \frac{1}{\eta}\right) - 2(a-bi)\left(\eta - \frac{1}{\eta'}\right).\end{aligned}$$

Die so gefundene Gleichung, welche den Zusammenhang von q, η, η' angibt, kann man als Integral einer Differentialgleichung für η und η' ansehen und q als Integrationsconstante auffassen. Die Differentialgleichung ergibt sich durch unmittelbare Differentiation in folgender Form

$$\begin{aligned}0 = \frac{d\eta}{\eta}&\left[\frac{1}{\sqrt{-q}}\left(\sqrt{\eta\eta'} + \frac{1}{\sqrt{\eta\eta'}}\right)\right.\\ &\qquad\left. - \sqrt{-q}\left((a+bi)\left(\frac{\eta'}{\eta}\right)^{\frac{1}{2}} - (a-bi)\left(\frac{\eta}{\eta'}\right)^{\frac{1}{2}}\right)\right]\\ + \frac{d\eta'}{\eta'}&\left[\frac{1}{\sqrt{-q}}\left(\sqrt{\eta\eta'} + \frac{1}{\sqrt{\eta\eta'}}\right)\right.\\ &\qquad\left. + \sqrt{-q}\left((a+bi)\left(\frac{\eta'}{\eta}\right)^{\frac{1}{2}} - (a-bi)\left(\frac{\eta}{\eta'}\right)^{\frac{1}{2}}\right)\right].\end{aligned}$$

Mit Hülfe der primitiven Gleichung (p) lassen sich aber die Factoren von $\frac{d\eta}{\eta}$ und $\frac{d\eta'}{\eta'}$ anders ausdrücken. Man braucht nur die linke Seite von (p) in zweifacher Weise zu einem vollständigen Quadrat zu ergänzen, indem man das fehlende doppelte Product das eine mal positiv, das andere mal negativ hinzufügt. Dadurch erhält man

$$\frac{1}{\sqrt{-q}}\left(\sqrt{\eta\eta'} + \frac{1}{\sqrt{\eta\eta'}}\right) + \sqrt{-q}\left((a+bi)\sqrt{\frac{\eta'}{\eta}} - (a-bi)\sqrt{\frac{\eta}{\eta'}}\right)$$
$$= \pm 2\sqrt{\left[2c + (a+bi)\frac{1}{\eta} - (a-bi)\,\eta\right]}.$$

$$\frac{1}{\sqrt{-q}}\left(\sqrt{\eta\eta'} + \frac{1}{\sqrt{\eta\eta'}}\right) - \sqrt{-q}\left((a+bi)\sqrt{\frac{\eta'}{\eta}} - (a-bi)\sqrt{\frac{\eta}{\eta'}}\right)$$
$$= \pm 2\sqrt{\left[2c + (a-bi)\frac{1}{\eta'} - (a+bi)\,\eta'\right]}$$

Nimmt man die Quadratwurzeln mit gleichen Vorzeichen, so geht die Differentialgleichung über in

$$(q)\quad 0 = \frac{d\eta}{2\eta\sqrt{2c+(a+bi)\frac{1}{\eta}-(a-bi)\,\eta}} + \frac{d\eta'}{2\eta'\sqrt{2c+(a-bi)\frac{1}{\eta'}-(a+bi)\,\eta'}}$$

Ihr Integral in algebraischer Form ist in der Gleichung (p) ausgesprochen oder, was auf dasselbe hinauskommt, in den beiden Gleichungen

$$(r)\quad \begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{-q}}(1+\eta\eta') &= \sqrt{\eta'\left[(a+bi) + 2c\eta - (a-bi)\,\eta^2\right]} \\ &\quad + \sqrt{\eta\left[(a-bi) + 2c\eta' - (a+bi)\,\eta'^2\right]}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{-q}\left((a+bi)\,\eta' - (a-bi)\,\eta\right) &= \sqrt{\eta'\left[(a+bi) + 2c\eta - (a-bi)\,\eta^2\right]} \\ &\quad - \sqrt{\eta\left[(a-bi) + 2c\eta' - (a+bi)\,\eta'^2\right]}. \end{aligned}$$

In transscendenter Form lautet das Integral

$$(s) \qquad const. = \int \frac{d\eta}{2\sqrt{\eta\,[(a+bi) + 2c\eta - (a-bi)\,\eta^2]}} + \int \frac{d\eta'}{2\sqrt{\eta'\,[(a-bi) + 2c\eta' - (a+bi)\,\eta'^2]}},$$

und die Integrationsconstante lässt sich ausdrücken

$$const. = \int \frac{dq}{2\sqrt{q\,[1 + 2cq - (a^2+b^2)\,q^2]}},$$

was aus der Gleichung (r) leicht hervorgeht, wenn man η oder η' constant und zwar $= 0$ nimmt. Man erkennt darin das Additionstheorem der elliptischen Integrale erster Gattung.

Ueber die Bestimmung der Constanten in der Variationsrechnung.

Von

M. A. Stern.

Der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften vorgelegt am 4. Mai 1867.

1.

In der Behandlung der Probleme der Variationsrechnung, welche man Jacobi verdankt, zeigt sich eine Schwierigkeit, welche die Mathematiker mehrfach beschäftigt hat, aber bis jetzt noch nicht vollständig gelöst worden ist. Es erscheinen nemlich in den Resultaten mehr willkührliche Constanten als der Natur der Aufgabe nach vorkommen dürfen und es folgt hieraus, dass unter diesen Constanten so viel Bedingungsgleichungen stattfinden müssen, als erforderlich sind, um die überzähligen Constanten weg zu schaffen. Man hat sich bis jetzt darauf beschränkt nachzuweisen, dass dies in den einfachsten Fällen wirklich eintrifft. Dagegen ist es noch nicht gelungen, allgemein zu zeigen dass wirklich jedesmal soviel solcher Bedingungsgleichungen vorhanden sind, als erfordert werden, und diese Gleichungen darzustellen. Herr Professor Hesse bezeichnet diese Untersuchung als eine würdige Aufgabe der Determinantentheorie, die ihrer allgemeinen Lösung harrt *). Ich hoffe im Folgenden zu zeigen, dass diese Lösung nicht blos in einer einfachen Weise ausgeführt werden kann, sondern dass die hier vorliegende Frage nur ein besonderer Fall einer allgemeineren Untersuchung aus der Theorie der Determinanten ist, welche ebenfalls in sehr einfacher Weise entwickelt werden kann.

*) Journal für die reine und angewandte Mathematik. Bd. 54, pag. 255.

2.

Ich muss zuerst, der Deutlichkeit wegen, in der Kürze den Gang schildern, welchen die Behandlung der hier zu betrachtenden Aufgabe der Variationsrechnung nimmt. Setzt man $\frac{d^k y}{dx^k} = y_k$ so soll

$$V = f(x, y, y_1, \ldots y_k)$$

eine gegebene Funktion der unabhängigen Veränderlichen x und der von dieser abhängigen Grösse y und deren Differentialquotienten $y_1, \ldots y_k$ seyn und es wird gefragt, bei welcher Abhängigkeit des y von x, das Integral

$$\int f(x, y, y_1, \ldots y_k)\, dx = \int V dx$$

zwischen bestimmten gegebenen Grenzen ein Maximum oder ein Minimum wird. Durch die Gleichung

$$\delta \int V dx = 0$$

wird diese Abhängigkeit bestimmt und zwar erscheint dieselbe in der Form

$$1) \qquad y = \psi(x, c, c_1, c_2, \ldots c_{2k})$$

wo $c_1, c_2, \ldots c_{2k}$ willkührliche Constanten bedeuten. Um zu entscheiden, ob ein Maximum oder ob ein Minimum statt hat, ist das Zeichen von $\int \delta^2 V dx$ zwischen den gegebenen Grenzen zu untersuchen. Nun hat man

$$\delta^2 V = \frac{d^2 V}{dy^2}\delta y^2 + 2\frac{d^2 V}{dy\, dy_1}\delta y\, \delta y_1 \ldots + \frac{d^2 V}{dy_k^2}\delta y_k^2.$$

Auf der rechten Seite dieser Gleichung kommen in den einzelnen Gliedern entweder die Quadrate von $\delta y, \delta y_1 \ldots \delta y_k$ vor, was also $k + 1$ Glieder giebt, oder die Combinationen dieser Ausdrücke zu zweien, was

$\frac{k+1 \cdot k}{2}$ Glieder giebt. Im Ganzen enthält also die rechte Seite dieser Gleichung $\frac{k+1 \cdot k+2}{2}$ Glieder.

Das Integral $\int \delta^2 V dx$ formt man nun so um, dass ein Theil desselben welcher

$$\int (M \delta y^2 + 2 M_1 \delta y \delta y_1 \ldots + M_r \delta y_k^2)\, dx$$

heisen soll, wirklich integrirbar ist und daher =

$$c + \alpha\, \delta y^2 + \alpha_1\, \delta y \delta y_1 \ldots + \alpha_s\, \delta y_{k-1}^2$$

zu setzen ist, wo c eine willkührliche Constante bedeutet und $\alpha, \alpha_1, \ldots \alpha_s$ zu bestimmende Coefficienten sind. Es ergiebt sich leicht, dass $M_r = 0$ seyn muss. Der übrige Theil des Integrals $\int \delta^2 V dx$ ist daher

$$\left[\int \left(\frac{d^2 V}{dy^2} - M\right) \delta y^2 + 2 \left(\frac{d^2 V}{dy\, dy_1} - M_1\right) \delta y\, \delta y_1 \ldots + \frac{d^2 V}{dy_k^2}\, \delta y_k^2\right]$$

und diesen bringt man in die Form

$$\int \frac{d^2 V}{dy_k^2}\, (\delta y_k + \beta_1\, \delta y_{k-1} + \beta_2\, \delta y_{k-2} \ldots + \beta_k\, \delta y)^2\, dx$$

so dass

$$2) \qquad \int \left(\frac{d^2 V}{dy^2}\, \delta y^2 + 2\, \frac{d^2 V}{dy\, dy_1}\, \delta y\, \delta y_1 \ldots + \frac{d^2 V}{dy_k^2}\, \delta y_k^2\right) dx =$$

$$c + \alpha\, \delta y^2 + \alpha_1\, \delta y\, \delta y_1 \ldots + \alpha_s\, \delta y_{k-1}^2 + \int \frac{d^2 V}{dy_k^2} (\delta y_k + \beta_1\, \delta y_{k-1} + \beta_2\, \delta y_{k-2} + \ldots + \beta_k\, \delta y)^2\, dx.$$

Die Constante c fällt bei der Integration zwischen den gegebenen Grenzen weg. Indem man nun die Gleichung 2) differentiirt und in den sich ergebenden Ausdrücken die Glieder einander gleich setzt, welche auf beiden Seiten δy^2, $\delta y\, \delta y_1$ u. s. w. als Faktoren enthalten, erhält man $\frac{k+1 \cdot k+2}{2} - 1$ Gleichungen, da das Glied, welches δy_k^2 enthält, auf beiden Seiten identisch ist. Genau so gross ist aber auch die Anzahl

der zu bestimmenden Grössen α, α_1, u. s. w. β_1, β_2, u. s. w. Man hat nemlich so viel Grössen α, α_1, u. s. w. als man Quadrate der Grössen δy, δy_1, ... δy_{k-1} und Combinationen derselben zu zweien hat, d. h. $k + \frac{k.k-1}{1.2}$. Hierzu kommen k Grössen β_1, β_2 ... β_k, also im Ganzen $\frac{k+1.k+2}{1.2} - 1$. Aus dem Ausdrucke $(\delta y_k + \beta_1 \delta y_{k-1} \ldots + \beta_k \delta y)^2$ ergiebt sich aber, dass man eine Gleichung erhält, durch welche β_1 bestimmt wird, und eine zweite durch welche β_1^2 bestimmt wird, ferner eine Gleichung durch welche β_2 bestimmt wird und eine zweite durch welche β_2^2 bestimmt wird u. s. w. Man kann also durch Elimination so viel Gleichungen wegschaffen, als man solche Grössen β_1, β_2, ... β_k hat, d. h. im Ganzen k Gleichungen, so dass noch $\frac{k^2+k}{2}$ Differentialgleichungen übrig bleiben, welche zu integriren sind. Durch diese Integration werden $\frac{k^2+k}{2}$ willkührliche Constanten eingeführt, welche so zu bestimmen sind, dass in $\int \frac{d^2V}{dy_k^2} (\delta y_k + \beta_1 \delta y_{k-1} \ldots + \beta_k \delta y)^2 dx$ der unter dem Integralzeichen stehende Ausdruck nicht innerhalb der Integrationsgrenzen unendlich wird.

Man sieht aber leicht, dass die Grössen α, α_1 ... α_s ohne Integration gefunden werden können, sobald die Grössen β_1 β_2 ... β_k bekannt sind und es ist das grosse Verdienst Jacobi's zuerst die wahre Form dieser Grössen gegeben zu haben. Man kann nemlich die erste Variation von $\int V dx$ so entwickeln, dass man

$$\delta \int V dx = G + \int W \delta y\, dx$$

hat, wo G den Complex der Glieder bedeutet, die nicht unter dem Integralzeichen stehen, während

$$W = \frac{dV}{dy} - \frac{d \cdot \frac{dV}{dy_1}}{dx} + \frac{d^2 \cdot \frac{dV}{dy_2}}{dx^2} \ldots .$$

ist. Daraus findet man

$$3) \qquad \delta^2 \int V dx = H + \int \delta W \, \delta y \, dx$$

wo wieder H den Complex der Glieder bedeutet, die nicht unter dem Integralzeichen stehen. Aus dem Vergleich der Formeln 2) und 3) ergiebt sich

$$4) \qquad \int \delta W \, \delta y \, dx = \int \frac{d^2 V}{dy_k^2} (\delta y_k + \beta_1 \, \delta y_{k-1} \ldots + \beta_k \, \delta y)^2 \, dx.$$

Ist mithin $\delta W = 0$ so ist auch

$$5) \qquad \delta y_k + \beta_1 \, \delta y_{k-1} \ldots + \beta_k \, \delta y = 0.$$

Die Werthe von δy, welche der Gleichung $\delta W = 0$ Genüge leisten, sind aber alle, wie Jacobi gezeigt hat, in der Form

$$\delta y = h_{1,1} \frac{dy}{dc_1} + h_{2,1} \frac{dy}{dc_2} \ldots + h_{2k,1} \frac{dy}{dc_{2k}}$$

enthalten, wo $c_1, c_2, \ldots c_{2k}$ die in der Gleichung 1) vorkommenden Constanten sind und $h_{1,1} \; h_{2,1} \ldots h_{2k,1}$ ebenfalls willkührliche Constanten bedeuten.

Man bezeichne nun durch $u_{1,1} \; u_{2,1} \ldots u_{k,1}$ k verschiedene Werthe von δy, welche der Gleichung $\delta W = 0$ Genüge leisten, ferner sey $u_{s,t+1}$ der Werth von δy_t, welcher zu $\delta y = u_{s,1}$ gehört. Man hat alsdann, in Folge der Gleichung 5), die k Gleichungen

$$6) \qquad \begin{array}{l} u_{1,1} \, \beta_k + u_{1,2} \, \beta_{k-1} + \ldots + u_{1,k} \, \beta_1 + u_{1,k+1} = 0 \\ u_{2,1} \, \beta_k + u_{2,2} \, \beta_{k-1} + \ldots + u_{2,k} \, \beta_1 + u_{2,k+1} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_{k,1} \, \beta_k + u_{k,2} \, \beta_{k-1} + \ldots + u_{k,k} \, \beta_1 + u_{k,k+1} = 0 \end{array}$$

aus welchen sich mithin die Werthe von $\beta_1, \beta_2 \ldots, \beta_k$ durch Elimination bestimmen lassen.

Man kann aber

$$u_{1,1} = h_{1,1}\frac{dy}{dc_1} + h_{2,1}\frac{dy}{dc_2} \ldots + h_{2k,1}\frac{dy}{dc_{2k}}$$
$$u_{2,1} = h_{1,2}\frac{dy}{dc_1} + h_{2,2}\frac{dy}{dc_2} \ldots + h_{2k,2}\frac{dy}{dc_{2k}}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$u_{k,1} = h_{1,k}\frac{dy}{dc_1} + h_{2,k}\frac{dy}{dc_2} \ldots + h_{2k,k}\frac{dy}{dc_{2k}}$$

setzen, oder wenn man $\frac{dy}{dc_r} = v_{r,1}$ setzt,

$$7)\quad \begin{cases} u_{1,1} = h_{1,1}\, v_{1,1} + h_{2,1}\, v_{2,1} \ldots + h_{2k,1}\, v_{2k,1} \\ u_{2,1} = h_{1,2}\, v_{1,1} + h_{2,2}\, v_{2,1} \ldots + h_{2k,2}\, v_{2k,1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_{k,1} = h_{1,k}\, v_{1,1} + h_{2,k}\, v_{2,1} \ldots + h_{2k,k}\, v_{2k,1} \end{cases}.$$

Da aber scheinbar in diesen Werthen von $u_{1,1}\; u_{2,1} \ldots u_{k,1}$ die $2k^2$ willkührlichen Constanten $h_{1,1} \ldots. h_{2k,k}$ vorkommen, so werden hierdurch scheinbar ebensoviel willkührliche Constanten in die Werthe von $\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_k$ (und mithin auch in die Werthe von $\alpha, \alpha_1 \ldots \alpha_s$) eingeführt, während das System der Differentialgleichungen, aus welchen diese Grössen bestimmt werden, wie oben nachgewiesen worden ist, nur auf $\frac{k^2+k}{2}$ willkührliche Constanten führt. Dies ist die zu überwindende Schwierigkeit.

3.

Die Grössen $h_{1,1} \ldots h_{2k,k}$ sind aber in der That nicht vollständig von einander unabhängig. Es ist nemlich zunächst zu bemerken dass, insofern sie in Werthen von δy vorkommen, welche sämmtlich der Gleichung $\delta W = 0$ genügen, Beziehungen unter ihnen stattfinden, welche zu

$\frac{k.k-1}{2}$ Bedingungsgleichungen zwischen denselben führen, wie dies Herr Prof. Hesse nachgewiesen hat *).

Es ist aber ferner zu bemerken, dass in den Werthen von $\beta_1 \ldots \beta_k$ die Constanten $h_{1,1} \ldots h_{2k,k}$ nicht unmittelbar, sondern in bestimmten Verbindungen vorkommen. Aus den Gleichungen 6) findet man nemlich

$$\beta_{k-l} = -\frac{\alpha_{1,l+1}\, u_{1,k+1} + \alpha_{2,l+1}\, u_{2,k+1} \ldots + \alpha_{k,l+1}\, u_{k,k+1}}{\Delta}$$

wo für l eine der Zahlen $0, 1 \ldots k-1$ zu nehmen ist und

$$\Delta = \begin{vmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & \ldots & u_{1,k} \\ u_{2,1} & u_{2,2} & \ldots & u_{2,k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_{k,1} & u_{k,2} & \ldots & u_{k,k} \end{vmatrix}$$

ist, ferner $\alpha_{1,l}\ \alpha_{2,l}$ u. s. w. bezüglich den Coefficienten von $u_{1,l}\ u_{2,l}$ u. s. w. in Δ bedeutet. Bezeichnet nun $v_{s,l+1}$ den Differentialquotienten der Ordnung l von $v_{s,1}$ so ist nach 7)

$$u_{s,l} = h_{1,s}\, v_{1,l} + h_{2,s}\, v_{2,l} \ldots + h_{2k,s}\, v_{2k,l}.$$

Nach der bekannten Regel der Multiplikation von Determinanten folgt also hieraus, dass die Determinante Δ die Summe aller Produkte von der Form

$$A) \quad \begin{vmatrix} h_{r_1,1} & h_{r_1,2} & \ldots & h_{r_1,k} \\ h_{r_2,1} & h_{r_2,2} & \ldots & h_{r_2,k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ h_{r_k,1} & h_{r_k,2} & \ldots & h_{r_k,k} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} v_{r_1,1} & v_{r_1,2} & \ldots & v_{r_1,k} \\ v_{r_2,1} & v_{r_2,2} & \ldots & v_{r_2,k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ v_{r_k,1} & v_{r_k,2} & \ldots & v_{r_k,k} \end{vmatrix}$$

ist, wo für $r_1\ r_2 \ldots r_k$ alle Combinationen der $k$ten Klasse aus den Elementen $1, 2, \ldots 2k$ zu nehmen sind. Hieraus ergiebt sich ferner, das man auch den Zähler des Werthes von β_{k-l} (abgesehen vom Zeichen) als die Summe aller Produkte von der Form

*) a. a. O., p. 253.

$$\begin{vmatrix} h_{r_1,1} & h_{r_1,2} & \dots & h_{r_1,k} \\ h_{r_2,1} & h_{r_2,2} & \dots & h_{r_2,k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ h_{r_k,1} & h_{r_k,2} & \dots & h_{r_k,k} \end{vmatrix} . P$$

darstellen kann, indem man unter P den Ausdruck versteht, in welchen

$$\begin{vmatrix} v_{r_1,1} & v_{r_1,2} & \dots & v_{r_1,k} \\ v_{r_2,1} & v_{r_2,2} & \dots & v_{r_2,k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ v_{r_k,1} & v_{r_k,2} & \dots & v_{r_k,k} \end{vmatrix}$$

übergeht, wenn man die in dieser Determinante vorkommende Verticalreihe $v_{r_1,l+1}\, v_{r_2,l+1} \dots v_{r_k,l+1}$ durch die Verticalreihe $v_{r_1,k+1}\, v_{r_2,k+1} \dots v_{r_k,k+1}$ ersetzt. Da man nemlich

$$\Delta = \alpha_{1,l+1}\, u_{1,l+1} + \alpha_{2,l+1}\, u_{2,l+1} \dots + \alpha_{k,l+1}\, u_{k,l+1}$$

hat und $u_{1,l+1}\, u_{2,l+1}$ u. s. w. in $\alpha_{1,l+1}\, \alpha_{2,l+1}$ u. s. w. nicht vorkommen zugleich $v_{r_1,l+1}\, v_{r_2,l+1}$ u. s. w. nur in $u_{1,l+1}\, u_{2,l+1} \dots u_{k,l+1}$ vorkommen, so kann die Verticalreihe $v_{r_1,l+1}\, v_{r_2,l+1} \dots$ in A) nur von den Grössen $u_{1,l+1}\, u_{2,l+1}$ u. s. w. herrühren. Nun geht Δ in $\alpha_{1,l+1}\, u_{1,k+1} + \alpha_{2,l+1}\, u_{2,k+1} \dots + \alpha_{k,l+1}\, u_{k,k+1}$ über, indem man $u_{1,k+1}$ statt $u_{1,l+1}$; $u_{2,k+1}$ statt $u_{2,l+1}$ u. s. w. setzt, d. h. indem man $v_{r_1,k+1}$ statt $v_{r_1,l+1}$ u. s. w. setzt, wodurch die obige Behauptung bewiesen ist.

Da also im Zähler und Nenner des Werthes von β_{k-l} die sämmtlichen $\frac{2k.(2k-1)\dots(k+1)}{1.2..k}$ Determinanten vorkommen, welche in dem Schema

$$\begin{vmatrix} h_{r_1,1} & h_{r_1,2} & \dots & h_{r_1,k} \\ h_{r_2,1} & h_{r_2,2} & \dots & h_{r_2,k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ h_{r_k,1} & h_{r_k,2} & \dots & h_{r_k,k} \end{vmatrix}$$

enthalten sind, so liegt der Gedanke nahe, statt der ursprünglichen Constanten $h_{1,1} \ldots h_{2k,k}$ diese aus ihnen zusammengesetzten Determinanten als Constanten einzuführen. Da aber diese neuen Constanten im Zähler und Nenner des Werthes von β_{k-l} in linearer Form vorkommen, so kann man mit einer derselben dividiren, so dass mithin nur noch $\frac{2k\,(2k-1)\ldots(k+1)}{1\,.\,2\,.\,.\,k} - 1$ übrig bleiben. Zwischen den neuen Constanten müssen nun jedenfalls $\frac{k\,.\,(k-1)}{1\,.\,2}$ Bedingungsgleichungen stattfinden, herrührend von den oben erwähnten $\frac{k\,.\,(k-1)}{1\,.\,2}$ Bedingungsgleichungen zwischen den ursprünglichen Constanten $h_{1,1} \ldots h_{2k,k}$ aus welchen sie zusammengesetzt sind, wodurch mithin eine eben so grosse Anzahl derselben bestimmt wird. Zieht man daher auch diese ab und ferner die $\frac{k^2+k}{2}$ Constanten, welche wirklich willkührlich seyn sollen, so bleibt

$$\frac{2k\,(2k-1)\ldots(k+1)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,k} - 1 - \frac{k(k-1)}{2} - \frac{k^2+k}{2} = \frac{2k\,(2k-1)\ldots(k+1)}{1\,.\,2\,.\,.\,k} - (k^2+1)$$

wodurch die Zahl der Bedingungsgleichungen ausgedrückt wird, welche noch nothwendig zwischen den neuen Constanten stattfinden müssen, wenn nicht mehr als $\frac{k^2+k}{2}$ derselben willkührlich seyn sollen.

Die Untersuchung kommt also darauf zurück, folgenden Satz zu beweisen:

Wenn man aus den k Elementenreihen mit je $2k$ Gliedern

$$\begin{matrix} h_{1,1} & h_{2,1} & \ldots & h_{2k,1} \\ h_{1,2} & h_{2,2} & \ldots & h_{2k,2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ h_{1,k} & h_{2,k} & \ldots & h_{2k,k} \end{matrix}$$

alle Determinanten von der Form

$$B) \quad \begin{vmatrix} h_{r_1,1} & h_{r_1,2} & \dots & h_{r_1,k} \\ h_{r_2,1} & h_{r_2,2} & \dots & h_{r_2,k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ h_{r_k,1} & h_{r_k,2} & \dots & h_{r_k,k} \end{vmatrix}$$

bildet, indem man statt $r_1, r_2 \dots r_k$ alle Combinationen der $k$ten Classe aus den Elementen $1, 2 \dots 2k$ nimmt, so kann man immer $k^2 + 1$ dieser Determinanten auswählen, so dass, wenn deren Werth als bekannt voraus gesetzt wird, sich daraus der Werth der übrigen ergiebt.

4.

Dieser Satz ist aber in folgendem allgemeineren enthalten, welcher nun bewiesen werden soll. Bezeichne n irgend eine ganze Zahl, die $\geqq k$ ist und man habe die k Elementenreihen

$$C) \quad \begin{matrix} h_{1,1} & h_{2,1} & \dots & h_{n,1} \\ h_{1,2} & h_{2,2} & \dots & h_{n,2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ h_{1,k} & h_{2,k} & \dots & h_{n,k} \end{matrix}$$

Bildet man nun aus denselben alle Determinanten von der Form $B)$ indem man statt $r_1\ r_2 \dots r_k$ alle Combinationen der $k$ten Klasse aus den Elementen $1, 2 \dots n$ setzt, so kann man immer aus den gegebenen Werthen von $k(n-k)+1$ dieser Determinanten, die Werthe aller übrigen finden. Zur Abkürzung bezeichne ich die Determinante $B)$ durch $(r_1\ r_2 \dots r_k)$ und nenne dies eine Kterne aus den Elementen $r_1\ r_2 \dots r_k$ und insofern statt $r_1\ r_2 \dots r_k$ alle Combinationen zur $k$ten Klasse aus den Elementen $1, 2, \dots n$ gesetzt werden sollen, sage ich: es sollen alle Kternen aus den Elementen $1, 2 \dots n$ gebildet werden. Ist $k = 2$ so soll $(r_1\ r_2)$ eine Ambe heissen, ebenso $(r_1\ r_2\ r_3)$ eine Terne, $(r_1\ r_2\ r_3\ r_4)$ eine Quaterne u. s. w. Ein Missverständniss kann hieraus nicht entstehen, insofern von Kternen, im gewöhnlichen combinatorischen Sinne des Wortes, nicht die Rede seyn wird. In dieser Weise ausgedrückt,

heisst also der zu beweisende Satz: Wenn man aus den Elementen $1, 2 \,.\,.\, n$ alle Kternen bildet, so kann man aus den gegebenen Werthen von $k(n-k)+1$ dieser Kternen die Werthe der übrigen finden. Man bemerke noch, dass wenn die Elemente $r_1\, r_2 \,.\,.\, r_k$ in der Kterne $(r_1\, r_2 \,.\,.\, r_k)$ ihre Plätze vertauschen, der Werth der Kterne entweder derselbe bleibt, oder in den entgegengesetzten übergeht, und dass die Kterne Null wird, wenn zwei Elemente einander gleich sind.

5.

Die Grundlage des Beweises bildet der bekannte Satz: Wenn man aus den zwei Determinanten

$$R = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

und

$$S = \begin{vmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,n} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & b_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n,1} & b_{n,2} & \cdots & b_{n,n} \end{vmatrix}$$

neue Determinanten bildet, nemlich die Determinante $t_{i,1}$ aus R dadurch, dass man die $i$te Verticalreihe von R durch die erste von S ersetzt, und die Determinante $u_{1,i}$ aus S dadurch, dass man die erste Verticalreihe von S durch die $i$te von R ersetzt, so ist

$$t_{1,1}\, u_{1,1} + t_{2,1}\, u_{1,2} \,.\,.\,.\, + t_{n,1}\, u_{1,n} = RS\,^{*)}.$$

*) Man vergl. Baltzer Theor. u. Anwend. der Determinanten 2. Aufl., §. 3, 11.

Man habe nun die zwei Determinanten

$$\begin{vmatrix} h_{1,1} & h_{1,2} & \dots & h_{1,k} \\ h_{2,1} & h_{2,2} & \dots & h_{2,k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ h_{k,1} & h_{k,2} & \dots & h_{k,k} \end{vmatrix}$$

und

$$\begin{vmatrix} h_{k+1,1} & h_{k+1,2} & \dots & h_{k+1,k} \\ h_{k+2,1} & h_{k+2,2} & \dots & h_{k+2,k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ h_{2k,1} & h_{2k,2} & \dots & h_{2k,k} \end{vmatrix}$$

von welchen, nach der oben eingeführten Bezeichnung, die erste durch $(1, 2 \dots k)$ die zweite durch $(k+1,\ k+2, \dots 2k)$ ausgedrückt wird, so ist nach diesem Satze

$$D) \quad (k+1, 2, 3 \dots k)(1, k+2, k+3 \dots 2k) + (1, k+1, 3, 4 \dots k)(2, k+2, k+3, \dots 2k) + \dots$$
$$+ (1, 2 \dots k-1, k+1)(k, k+2, k+3, \dots 2k) = (1, 2 \dots k)(k+1, k+2, \dots 2k).$$

Man setze in dieser Gleichung $2k = 1$, $2k - 1 = 2$ u. s. w. schliesslich noch $k + 3 = k - 2$. Auf der linken Seite wird durch die Annahme $2k = 1$ das erste Glied $= 0$, durch die Annahme $2k - 1 = 2$ wird das zweite Glied $= 0$ u. s. w. Es bleibt daher die Gleichung

$$(1, 2, \dots k-2, k+1, k)(k-1, k+2, k+3, \dots 2k) + (1, 2, \dots k-1, k+1)(k, k+2, k+3 \dots 2k)$$
$$= (1, 2 \dots k)(k+1,\ k+2, \dots 2k)$$

oder

$$E) \quad (1, 2 \dots k-2, k+1, k)(k-1, k+2, k-2, k-3, \dots 2, 1) + (1, 2, \dots k-1, k+1)(k, k+2, k-2, k-3, \dots 2, 1)$$
$$= (1, 2 \dots k)(k+1, k+2, k-2, \dots 2, 1).$$

Insofern nun, wie schon oben bemerkt wurde, wenn in diesen Ausdrücken die Elemente ihre Stellen vertauschen, dies nur eine Aende-

rung des Zeichens, nicht aber des absoluten Werthes, bewirken kann, so giebt mithin diese Gleichung einen Zusammenhang zwischen den sechs Kternen

$$(1,2,\ldots k-2,k-1,k),\ (1,2,\ldots k-2,k-1,k+1),\ (1,2,\ldots k-2,k-1,k+2),$$
$$(1,2,\ldots k-2,k,k+1),\ (1,2\ldots k-2,k,k+2),\ (1,2\ldots k-2,k+1,k+2$$

so dass, wenn man die fünf ersten kennt, man daraus die sechste finden kann. Dies soll durch die symbolische Gleichung

$$F)\quad [(1,2,\ldots k-2,k-1,k),(1,2\ldots k-2,k-1,k+1),(1,2,\ldots k-2,k-1,k+2),$$
$$(1,2\ldots k-2,k,k+1),(1,2,\ldots k-2,k,k+2)]=(1,2,\ldots k-2,k+1,k+2)$$

ausgedrückt werden. Im Folgenden kommt es zunächst nur darauf an zu zeigen, dass man aus gewissen gegebenen Kternen gewisse andere finden kann, nicht aber die nöthigen Rechnungen wirklich auszuführen. Zu diesem Zwecke ist die Gleichung F), welche die Grundgleichung heissen soll, besonders geeignet. Will man dagegen die Rechnungen wirklich ausführen, so muss man die Gleichung E) anwenden. Dass man in der Reduction der Gleichung D) nicht weiter als bis zur Gleichung E) zurückgehen kann ist klar, denn würde man noch $k+2=k-1$ setzen, so würde die letztere Gleichung identisch Null werden.

6.

Sey zuerst $n=k+2$; es soll nun gezeigt werden, dass man alle übrigen Kternen aus den Elementen $1,2\ldots k+2$ vermittelst $2k+1$ dieser Kternen, deren Werthe gegeben sind, finden kann.

In jeder Kterne aus den Elementen $1,2\ldots k+2$ kommen entweder die Elemente $k,k+1,k+2$ einzeln vor, oder ihre Verbindungen zu zweien oder alle drei zugleich. Man kann daher diese sämmtlichen Kternen in drei Klassen theilen, nemlich 1) in solche, in welchen nur eines der Elemente $k,k+1$, $k+2$ oder zugleich k und $k+1$ oder k und $k+2$ vorkommt, 2) in solche, in welchen zugleich $k+1$, $k+2$ aber nicht k vorkommt, 3) in solche, in welchen zugleich die

drei Elemente $k, k+1$, $k+2$ vorkommen. Die erste Klasse enthält also die Kternen, in welchen entweder die Elemente $1, 2, \ldots k-1$ mit den einzelnen Elementen $k, k+1$, $k+2$ oder die Combinationen der $k-2$ten Klasse aus den Elementen $1, 2, \ldots k-1$ mit den Elementenpaaren $k, k+1$ oder $k, k+2$ verbunden sind. Man kann daher auch sagen, dass die erste Klasse aller Kternen enthält, in welchen nicht zugleich die zwei Elemente $k+1$, $k+2$ vorkommen.

Die zweite Klasse enthält alle Kternen, in welchen die Combinationen der $k-2$ten Klasse aus den Elementen $1, 2, \ldots k-1$ mit dem Elementenpaare $k+1$, $k+2$ verbunden sind, und mithin die zwei ersten Klassen zusammengenommen alle Kternen, in welchen entweder die Elemente $1, 2 \ldots k-1$ mit den einzelnen Elementen $k, k+1$, $k+2$ oder die Combinationen der $k-2$ten Klasse aus $1, 2 \ldots k-1$ mit den Combinationen der zweiten Klasse aus $k, k+1$, $k+2$ verbunden sind. Die Kternen der ersten Klasse werden als gegeben angenommen, ihre Anzahl ist $3 + 2(k-1) = 2k+1$.

In der Grundgleichung F) sind mithin die fünf auf der linken Seite stehenden Kternen bekannt. Denn in drei derselben sind die Elemente $1, 2 \ldots k-1$ mit den einzelnen Elementen k, $k+1$, $k+2$ verbunden, und in den zwei anderen die Elemente $1, 2, \ldots k-2$ mit den Elementenpaaren k, $k+1$ und k, $k+2$.

Vertauscht man in dieser Gleichung allmälich das Element $k-1$ mit einem der Elemente $1, 2 \ldots k-2$ so erhält man $k-2$ neue Gleichungen. Diese enthalten wieder die drei Glieder, in welchen die Elemente $1, 2 \ldots k-1$ mit den einzelnen Elementen $k, k+1$, $k+2$ verbunden sind, unverändert. Dagegen erhält man nun statt der Elemente $1, 2 \ldots k-2$, welche in den zwei anderen Gliedern vorkommen, alle übrigen Combinationen der $k-2$ten Klasse, die sich aus $1, 2, \ldots k-1$ bilden lassen und mithin statt der zwei Kternen der Grundgleichung, in welchen $k, k+1$ und $k, k+2$ vorkommen, die Kternen, in welchen diese Elementenpaare mit den übrigen Combinationen der $k-2$ten Klasse aus $1, 2 \ldots k-1$ verbunden sind. Die Grundgleichung und die aus ihr abgeleiteten $k-2$ Gleichungen zusammengenommen enthalten also

auf der linken Seite sämmtliche Kternen der ersten Klasse und nur diese.

Auf der rechten Seite der Grundgleichung steht die Kterne, in welcher die Elemente $1, 2 \ldots k-2$ mit $k+1$, $k+2$ verbunden sind, in den $k-2$ abgeleiteten Gleichungen kommt daher auf der rechten Seite dieses Elementenpaar mit allen übrigen Combinationen der $k-2$ten Klasse aus $1, 2 \ldots k-1$ verbunden vor. Die Grundgleichung und die aus ihr abgeleiteten Gleichungen enthalten also zusammengenommen auf der rechten Seite sämmtliche $k-1$ Kternen der zweiten Klasse und nur diese, so dass nemlich in jeder Gleichung eine vorkommt.

Es ist mithin nachgewiesen, dass die $2k+1$ Kternen der ersten Klasse nothwendig und hinreichend sind um die Kternen der zweiten Klasse zu finden. Sie reichen aber auch hin, um die Kternen der dritten Klasse zu finden. In diesen letzteren sind nemlich die Combinationen der $k-3$ten Klasse aus den Elementen $1, 2 \ldots k-1$ mit den drei Elementen $k, k+1, k+2$ verbunden. Nun erhält man die eine dieser Kternen, nemlich $(1, 2 \ldots k-3, k, k+1, k+2)$ dadurch, dass man in dem auf der rechten Seite der Grundgleichung stehenden Gliede das Element $k-2$ mit dem Elemente k vertauscht. Nimmt man aber auf der linken Seite der Grundgleichung dieselbe Vertauschung vor, so bleiben die dortigen Kternen entweder ungeändert, oder gehen in andere der ersten Klasse über, da die aus dieser Vertauschung entstandenen Kternen, ebensowenig als diejenigen, aus welchen sie entstanden sind, zugleich die Elemente $k+1$ und $k+2$ enthalten können. Man erhält mithin durch diese Vertauschung eine Gleichung (F) aus welcher der Werth der auf der rechten Seite stehenden Kterne $(1, 2 \ldots k-3, k, k+1, k+2)$ bestimmt wird. Aus dieser Kterne werden nun aber die übrigen Kternen der dritten Klasse gefunden, indem man statt der Combination $1, 2 \ldots k-3$ die verschiedenen anderen Combinationen der $k-3$ten Klasse aus den Elementen $1, 2 \ldots k-1$ setzt, d. h. also indem man die Elemente $1, 2 \ldots k-1$ auf gewisse Weise unter einander vertauscht. Hierdurch können aber die auf der linken Seite der Gleichung (F) stehenden Kternen erster Klasse wieder

nur in Kternen derselben Klasse übergehen, und es werden demnach die sämmtlichen Kternen dritter Klasse durch bekannte Grössen bestimmt.

Im Vorhergehenden ist mithin nachgewiesen, dass die $2k+1$ Kternen erster Klasse nothwendig und hinreichend sind, um sämmtliche übrigen Kternen aus den Elementen $1, 2 \ldots k+2$ zu finden. Hierzu sind $\frac{k+2 \, . \, k+1}{1 \, . \, 2} - (2k+1) = \frac{k^2-k}{2}$ Gleichungen erforderlich; die Gesammtheit dieser Gleichungen soll das System A) heissen.

Es sollen z. B. die Ternen aus den Elementen 1, 2, 3, 4, 5 gefunden werden, d. h. also, es sind die drei Elementenreihen

$$\begin{array}{l} h_{1,1} \; h_{2,1} \; \ldots \; h_{5,1} \\ h_{1,2} \; h_{2,2} \; \ldots \; h_{5,2} \\ h_{1,3} \; h_{2,3} \; \ldots \; h_{5,3} \end{array}$$

gegeben und es sollen die Bedingungsgleichungen gefunden werden, welche zwischen den aus ihnen gebildeten Determinanten von der Form

$$\begin{vmatrix} h_{r_1,1} & h_{r_1,2} & h_{r_1,3} \\ h_{r_2,1} & h_{r_2,2} & h_{r_2,3} \\ h_{r_3,1} & h_{r_3,2} & h_{r_3,3} \end{vmatrix}$$

stattfinden, indem man für $r_1 \, r_2 \, r_3$ alle Combinationen der dritten Klasse nimmt, welche sich aus den Elementen 1, 2, 3, 4, 5 bilden lassen.

Hier ist $k = 3$ und die 7 Ternen (123), (124), (125), (134), (135), (234), (235) bilden die erste Klasse und werden als bekannt angenommen. Die Grundgleichung ist

$$(123), (124), (125), (134), (135) = (145).$$

Indem man in derselben 1 mit 2 vertauscht, erhält man

$$(123), (124), (125), (234), (235) = (245)$$

hierdurch sind die zwei Ternen (145), (245) bestimmt, welche die zweite Klasse bilden. Vertauscht man ferner in der Grundgleichung das Element 1 mit dem Elemente 3 so erhält man

$$(123), (234), (235), (134), (135) = (345)$$

wodurch die Terne (345), die hier allein die dritte Klasse ausmacht, bestimmt wird. Hier finden also zwischen den 10 Ternen drei Bedingungsgleichungen statt.

7.

Hat man noch ein Element $k+3$ so können alle übrigen Kternen aus den Elementen $1, 2 \ldots k+3$ vermittelst $3k+1$ dieser Kternen, welche man als gegeben annimmt, gefunden werden. Man setze nemlich diejenigen Kternen als bekannt voraus, in welchen nur eines der Elemente k, $k+1$, $k+2$, $k+3$ oder zugleich eines der Paare $k, k+1$; $k, k+2$; $k, k+3$ vorkommt. Der Inbegriff dieser Kternen bildet wieder die erste Klasse, welche also alle Kternen umfasst, in welchen nicht zugleich zwei der drei Elemente $k+1$, $k+2$, $k+3$ vorkommen. Ihre Anzahl ist offenbar $4+3(k-1) = 3k+1$. In die zweite Klasse gehören dagegen die Kternen, in welchen zwei der drei Elemente $k+1$, $k+2$, $k+3$ zugleich vorkommen, während sie das Element k nicht enthalten. Die erste und zweite Klasse zusammengenommen enthalten also alle Kternen, in welchen die Elemente k, $k+1$, $k+2$, $k+3$ einzeln oder zu zweien verbunden vorkommen. In die dritte Klasse gehören alle Kternen, in welchen die Elemente k, $k+1$, $k+2$, $k+3$ zu dreien verbunden vorkommen; die Kternen dagegen, in welchen alle vier vorkommen, bilden die vierte Klasse.

Die erste Klasse enthält offenbar alle die Kternen, welche wir im vorhergehenden Falle, wo das Element $k+3$ fehlte, zu dieser Klasse gerechnet haben. Ebenso ist es bei der zweiten und dritten Klasse. Man kann also zunächst wieder genau so, wie es dort geschehen ist, das System A) bilden.

Indem man aber dann in den $k-1$ Gleichungen dieses Systems, durch welche die Kternen zweiter Klasse gefunden worden sind, das Element $k+2$ mit dem Elemente $k+3$ vertauscht, erhält man ein

neues System von $k - 1$ Gleichungen, in welchem auf der linken Seite alle Kternen vorkommen, welche die einzelnen Elemente $k, k+1, k+3$ oder die Paare $k, k+1$ und $k, k+3$ enthalten Diese sind mithin, nach unserer Voraussetzung, sämmtlich bekannt. Auf der rechten Seite stehen in diesen Gleichungen die Kternen, welche das Elementenpaar $k+1, k+3$ aber nicht das Element k enthalten und nur diese Kternen. Dieses System von $k - 1$ Gleichungen soll das System B) heissen.

Vertauscht man nun in diesem System das Element $k+1$ mit dem Elemente $k+2$ so erhält man wieder ein neues System von $k - 1$ Gleichungen, in welchem auf der linken Seite alle Kternen vorkommen, welche die einzelnen Elemente $k, k+2, k+3$, oder die Paare $k, k+2$ und $k, k+3$ enthalten. Auf der rechten Seite stehen die Kternen, welche das Paar $k+2, k+3$ aber nicht das Element k enthalten und nur diese. Dieses System heisse das System C).

Die drei Systeme A), B), C) enthalten also zusammen genommen auf der linken Seite alle Kternen der ersten Klasse und keine anderen und auf der rechten Seite alle Kternen der zweiten Klasse und keine anderen. Es ist also hiermit nachgewiesen, dass auch in diesem Falle es nothwendig und hinreichend ist, die Werthe der $3k+1$ Kternen der ersten Klasse zu kennen, um daraus die Werthe der Kternen der zweiten Klasse zu finden.

Es sind nun noch die Werthe der Kternen der dritten und vierten Klasse zu finden. Betrachten wir zunächst die Kternen der dritten Klasse. Von diesen sind bereits, durch das System A), diejenigen gefunden, welche die drei Elemente $k, k+1, k+2$ enthalten. Vertauscht man in den Gleichungen, durch welche sie bestimmt werden, das Element $k+2$ mit dem Elemente $k+3$, so erhält man neue Gleichungen, in welchen nun auf der rechten Seite die Kternen, welche die Verbindung $k, k+1, k+3$ enthalten, stehen; auf der linken Seite werden durch diese Vertauschung keine unbekannten Kternen eingeführt. Während nemlich in dem Systeme A) auf der linken Seite entweder die einzelnen Elemente $k, k+1, k+2$ oder die Verbindungen $k, k+1$ und $k, k+2$ vorkommen, erscheinen hier die einzelnen Elemente $k, k+1, k+3$ oder

die Verbindungen k, $k+1$ und k, $k+3$; die entsprechenden Kternen sind also alle, da sie zur ersten Klasse gehören, bekannt. Aus diesen neuen Gleichungen, welche das System D) heissen mögen, werden daher alle Kternen gefunden, welche die Verbindung k, $k+1$, $k+3$ enthalten. Vertauscht man nun in diesem Systeme $k+1$ mit $k+2$ so erhält man ein neues System E), welches wieder auf der linken Seite nur bekannte Kternen enthält, so dass also hierdurch die Kternen bestimmt werden, welche die Verbindung k, $k+2$, $k+3$ enthalten. In diesem Systeme kommen auf der linken Seite entweder die einzelnen Elemente k, $k+2$, $k+3$ oder die Verbindungen k, $k+2$ und k, $k+3$ vor. Vertauscht man nun noch in diesem Systeme k mit $k+1$, so kommen nun auf der linken Seite entweder Kternen mit den einzelnen Elementen $k+1$, $k+2$, $k+3$ oder mit den Verbindungen $k+1$, $k+2$ und $k+1$, $k+3$ vor. Von diesen Kternen gehören die einen zur ersten, die anderen zur zweiten Klasse und sind daher nun alle bekannt. Auf der rechten Seite stehen aber alle Kternen, welche zugleich die drei Elemente $k+1$, $k+2$, $k+3$ enthalten, die also nun ebenfalls bestimmt sind. Bezeichnet man dieses System mit F) so ist demnach erwiesen, dass durch die Systeme A), D), E), F) alle Kternen bestimmt sind, in welchen die Elemente k, $k+1$, $k+2$, $k+3$ zu dreien verbunden vorkommen, d. h. alle Kternen der dritten Klasse.

Es sind nun noch schliesslich die Kternen zu finden, in welchen zugleich die Elemente k, $k+1$, $k+2$, $k+3$ vorkommen. Man bemerke, dass in dem Systeme F) eine Gleichung enthalten ist, auf deren rechten Seite die Kterne $(1,2 \ldots k-4,\ k-1,\ k+1,\ k+2,\ k+3)$ steht. In dieser Gleichung vertausche man das Element $k-1$ mit dem Elemente k. Hierdurch entsteht eine neue Gleichung, welche auf der linken Seite nur bekannte Kternen enthält. Denn von diesen Kternen gehören alle übrigen zur ersten oder zweiten Klasse, nur wo in F) die Elemente $k-1$, $k+1$, $k+2$ oder $k-1$, $k+1$ $k+3$ vorkommen, treten jetzt die Elemente k, $k+1$, $k+2$ oder k, $k+1$, $k+3$ an deren Stelle; dies giebt aber Kternen dritter Klasse, welche nun be-

kannt sind. Auf der rechten Seite dieser neuen Gleichung steht die Kterne $(1, 2 \ldots k-4, k, k+1, k+2, k+3)$, also eine der gesuchten, die hiermit bestimmt ist. Indem man nun allmälich statt der Elemente $1, 2 \ldots k-4$ alle übrigen Combinationen der $k-4$ten Klasse aus den Elementen $1, 2 \ldots k-1$ setzt, was also durch eine Vertauschung dieser Elemente unter einander geschieht, und mithin auf der linken Seite der neuen Gleichungen keine unbekannte Kterne einführen kann, erhält man sämmtliche Kternen, welche zugleich die vier Elemente $k, k+1, k+2, k+3$ enthalten. Es ist mithin nachgewiesen, dass die $3k+1$ Kternen erster Klasse nothwendig und hinreichend sind, um alle übrigen Kternen aus den Elementen $1, 2 \ldots k+3$ zu finden.

Zur Erläuterung will ich die Bedingungsgleichungen entwickeln, welche zwischen den Ternen aus den 6 Elementen 1, 2, 3, 4, 5, 6 stattfinden. Hier ist wieder $k = 3$ und die 10 Ternen erster Klasse, welche als bekannt angenommen werden, sind *)

123, 124, 125, 126, 134, 135, 136, 234, 235, 236.

Das System A) ist schon im vorhergehenden § entwickelt worden. Aus den dortigen Gleichungen

$$123, 124, 125, 134, 135 = 145$$
$$123, 124, 125, 234, 235 = 245$$

folgt durch Vertauschung von 5 mit 6 das System B)

$$123, 124, 126, 134, 136 = 146$$
$$123, 124, 126, 234, 236 = 246.$$

Vertauscht man hier 4 mit 5 so erhält man das System C)

$$123, 125, 126, 135, 136 = 156$$
$$123, 125, 126, 235, 236 = 256,$$

hierdurch sind die sämmtlichen Ternen zweiter Klasse

145, 245, 146, 246, 156, 256

gefunden.

*) Zur Erleichterung des Druckes habe ich im Folgenden die Klammern weggelassen.

Aus der Gleichung

$$123,\ 134,\ 135,\ 234,\ 235 = 345$$

des Systems *A*) folgt durch Vertauschung von 5 mit 6

$$123,\ 134,\ 136,\ 234,\ 236 = 346.$$

Diese Gleichung bildet das System *D*). Vertauscht man in ihr 4 mit 5 so erhält man

$$123,\ 135,\ 136,\ 235,\ 236 = 356.$$

Dies ist das System *E*) und hieraus folgt durch Vertauschung von 3 mit 4

$$124,\ 145,\ 146,\ 245,\ 246 = 456$$

welche Gleichung das System *F*) bildet; in derselben kommen auf der linken Seite, die zur zweiten Klasse gehörenden Ternen 145, 146, 245, 246 vor. Durch die letzten vier Gleichungen werden die Ternen der dritten Klasse, 345, 346, 356, 456 gefunden und es finden im Ganzen zwischen den 20 Ternen aus den Elementen 1, 2, 3, 4, 5, 6 zehn Bedingungsgleichungen statt. Wollte man statt dieser symbolischen Gleichungen die wirklichen, wie sie sich aus der Formel *E*) ergeben, aufstellen, so wären es folgende

$$\begin{aligned}
143\,.\,251 + 124\,.\,351 &= 123\,.\,451\\
243\,.\,152 + 214\,.\,352 &= 213\,.\,452\\
341\,.\,253 + 324\,.\,153 &= 321\,.\,453\\
143\,.\,261 + 124\,.\,361 &= 123\,.\,461\\
243\,.\,162 + 214\,.\,362 &= 213\,.\,462\\
153\,.\,261 + 125\,.\,361 &= 123\,.\,561\\
253\,.\,162 + 215\,.\,362 &= 213\,.\,562\\
341\,.\,263 + 324\,.\,163 &= 321\,.\,463\\
351\,.\,263 + 325\,.\,163 &= 321\,.\,563\\
451\,.\,264 + 425\,.\,164 &= 421\,.\,564
\end{aligned}$$ *).

*) Diesen Gleichungen entsprechen bei Hesse a. a. O. p. 272 die Gleichungen 1, 6, 11, 2, 7, 3, 8, 12, 13, 19.

8.

Es hat nun keine Schwierigkeiten auf den allgemeinen Fall über zu gehen. Es sollen alle Kternen aus den Elementen $1, 2 \ldots k + n$ gefunden werden. Hierzu muss man als bekannt voraus setzen: erstens, alle Kternen, in welchen nur eins der Elemente $k, k + 1, \ldots k + n$ vorkommt, die Anzahl dieser Kternen ist $n + 1$, und zweitens alle Kternen, welche zugleich das Element k und eines der Elemente $k + 1, k + 2 \ldots k + n$ enthalten, deren Anzahl $n(k - 1)$ ist. Die Anzahl der als bekannt angenommenen Kternen ist mithin $nk + 1$; diese zusammengenommen bilden die erste Klasse, die mithin alle Kternen umfasst in welchen nicht zugleich zwei der Elemente $k + 1, k + 2, \ldots k + n$ vorkommen. Irgend eine Vertauschung der Elemente $k + 1, k + 2 \ldots k + n$ unter einander kann also in den Kternen erster Klasse nur die Aenderung hervorbringen, dass einige dieser Kternen in andere derselben Klasse übergehen.

In die zweite Klasse sollen die Kternen gehören, in welchen zugleich zwei der Elemente $k + 1, \ldots k + n$ vorkommen, während sie das Element k nicht enthalten. Die Kternen, welche zugleich drei oder vier u. s. w. der Elemente $k, k + 1 \ldots k + n$ (und nicht mehr) enthalten, sollen die dritte, vierte u. s. w. Klasse bilden.

In der Grundgleichung F) kommen auf der linken Seite nur Kternen der ersten Klasse, also nur bekannte Ausdrücke vor, nemlich drei Kternen, in welchen die Elemente $1, 2 \ldots k - 1$ mit einem der Elemente $k, k + 1, k + 2$ verbunden sind, und zwei, in welchen die Elemente $1, 2 \ldots k - 2$ mit $k, k + 1$ und mit $k, k + 2$ verbunden sind. Auf der rechten Seite steht die Kterne $(1, 2 \ldots k - 2, k + 1, k + 2)$, die also zur zweiten Klasse gehört, und durch die Grundgleichung gefunden wird. Indem man nun statt $1, 2 \ldots k - 2$ alle übrigen Combinationen der $k - 2$ Klasse setzt, welche sich aus den Elementen $1, 2, \ldots k - 1$ bilden lassen, erhält man aus der Kterne $(1, 2 \ldots k - 2, k + 1, k + 2)$ alle übrigen Kternen, welche als höchste Elemente die Elemente $k + 1, k + 2$ und nicht zugleich das Element k enthalten. Diese Operation entspricht aber einer Vertauschung der Elemente $1, 2 \ldots k - 1$ unter

einander. Indem man daher diese Vertauschung in der Grundgleichung vornimmt, erhält man ein System von $k-1$ Gleichungen, welches auf der linken Seite, ausser den Kternen, in welchen die Elemente $1, 2 \ldots k-1$ mit einem der drei Elemente k, $k+1$, $k+2$ verbunden sind, noch sämmtliche Kternen enthält, in welchen die Combinationen der $k-2$ten Klasse aus $1, 2 \ldots k-1$ mit den Paaren $k, k+1$ oder $k, k+2$ verbunden sind, während auf der rechten Seite alle die Kternen zweiter Klasse erscheinen, in welchen zugleich die Elemente $k+1$ und $k+2$ vorkommen, die also aus diesen Gleichungen gefunden werden. Der Inbegriff dieser Gleichungen soll das System A_1) heissen.

Vertauscht man in diesem Systeme $k+2$ mit $k+3$ so erhält man ein neues System A_2) in welchem nun auf der linken Seite alle Kternen vorkommen, die neben den Elementen $1, 2, \ldots k-1$ das Element $k+3$ und neben den Combinationen der $k-2$ten Klasse aus $1, 2 \ldots k-1$ zugleich das Paar $k, k+3$ enthalten, welche sämmtlich bekannt sind. Man bestimmt daher durch dieses System die nun auf der rechten Seite befindlichen Kternen, in welchen die Combinationen der $k-2$ten Klasse aus $1, 2 \ldots k-1$ mit dem Paare $k+1$, $k+3$ verbunden sind. Vertauscht man in diesem Systeme $k+3$ mit $k+4$ so erhält man ein neues System A_3) durch welches die Kternen bestimmt werden, in welchen die Combinationen der $k-2$ten Klasse aus $1, 2 \ldots k-1$ mit $k+1$, $k+4$ verbunden sind. Indem man so fortfährt, also schliesslich das Element $k+n-1$ mit dem Elemente $k+n$ vertauscht, erhält man n Systeme von je $k-1$ Gleichungen, in welchen auf der linken Seite alle als bekannt angenommenen Kternen und nur diese vorkommen, während auf der rechten Seite alle Kternen stehen, welche zugleich $k+1$ und eines der Elemente $k+2$, $k+3$, $\ldots$ $k+n$ enthalten.

Vertauscht man nun ferner in dem Systeme A_2) die Elemente $k+1$ und $k+2$ so erhält man ein neues System, in welchem auf der rechten Seite die Kternen vorkommen, welche die Combinationen der $k-2$ten Klasse aus $1, 2 \ldots k-1$ und das Paar $k+2$, $k+3$ enthalten, während auf der linken Seite nur Kternen der ersten Klasse vorkommen.

Dieselbe Vertauschung auf A_3) angewandt, führt zur Kenntniss der Kternen, in welchen die Combinationen der $k-2$ten Klasse aus $1, 2 \ldots k-1$ mit $k+2$, $k+4$ verbunden sind. Indem man so fortfährt, findet man aus allen den Systemen A_1) A_2) u. s. w. zusammengenommen, sämmtliche Kternen, in welchen die Combinationen der $k-2$ten Klasse aus $1, 2 \ldots k-1$ mit den Combinationen der zweiten Klasse aus $k+1, \ldots k+n$ verbunden sind, d. h. also alle Kternen der zweiten Klasse.

Die sämmtlichen Gleichungen der Systeme A_1), A_2) u. s. w. enthalten auf der rechten und linken Seite zusammengenommen, sämmtliche Kternen, in welchen die Elemente k, $k+1 \ldots k+n$ entweder einzeln oder paarweise verbunden vorkommen. Der Inbegriff aller dieser Gleichungen soll das System S heissen.

Um nun zunächst die Kternen zu finden, in welchen zugleich die Elemente k, $k+1$, $k+2$ und keine höheren vorkommen, nimmt man aus dem Systeme S die Gleichung, welche auf der rechten Seite die Kterne enthält, in der die Elemente $1, 2 \ldots k-3$ mit den drei Elementen $k-1$, $k+1$, $k+2$ verbunden sind und vertauscht in derselben $k-1$ mit k, wodurch man die Kterne $(1, 2, \ldots k-3, k, k+1, k+2)$ erhält. Die auf der linken Seite dieser neuen Gleichung erscheinenden Kternen sind alle unter den ursprünglich als bekannt angenommenen der ersten Klasse enthalten und mithin auch die Kterne $(1, 2, \ldots k-3, k, k+1, k+2)$ bekannt. Indem man nun statt $1, 2 \ldots k-3$ alle übrigen Combinationen der $k-3$ten Klasse aus den Elementen $1, 2, \ldots k-1$ setzt, was also auf eine Vertauschung dieser Elemente unter einander zurück kommt, und mithin auf der linken Seite der Gleichungen nur bekannte Kternen der ersten Klasse einführt, findet man sämmtliche Kternen, in welchen k, $k+1$, $k+2$ die höchsten Elemente sind. Setzt man nun statt $k+1$, $k+2$ alle übrigen Verbindungen zu zweien, die sich aus den Elementen $k+1, k+2, \ldots k+n$ bilden lassen, wodurch mithin wieder auf der linken Seite der Gleichungen nur bekannte Kternen der ersten Klasse eingeführt werden, so findet man alle Kternen, in welchen als höchste Elemente k und irgend ein aus den Elementen $k+1, \ldots k+n$ gebildetes Paar vorkommen.

Man nehme jetzt die Gleichung, in welcher auf der rechten Seite die Kterne $(1, 2 \ldots k-3, k, k+2, k+3)$ vorkommt und vertausche k mit $k+1$, wodurch man die Kterne $(1,2, \ldots k-3, k+1, k+2, k+3)$ erhält. Auf der linken Seite werden hierdurch Kternen eingeführt, welche neben Elementen aus der Reihe $1, 2, \ldots k-1$, noch Paare $k+1, k+2$ und $k+1, k+3$ enthalten, während das Element k nicht vorkommt. Diese Kternen gehören aber in die zweite Klasse und sind mithin schon bekannt, folglich auch die Kterne $(1, 2 \ldots k-3, k+1, k+2, k+3)$. Indem man nun statt $1, 2 \ldots k-3$ alle übrigen Combinationen der $k-3$ten Klasse aus den Elementen $1, 2 \ldots k-1$ setzt, erscheinen auf der linken Seite wieder nur bereits bekannte Kternen, auf der rechten Seite aber alle Kternen, welche aus den Combinationen der $k-3$ten Klasse aus den Elementen $1, 2 \ldots k-1$ und den Elementen $k+1, k+2, k+3$ gebildet sind. Diese letzteren Kternen sind demnach nun alle bekannt. Setzt man ferner statt der drei Elemente $k+1, k+2, k+3$ alle übrigen Combinationen zu dreien, die sich aus den Elementen $k+1, \ldots k+n$ bilden lassen, so kommen auf der linken Seite der hierdurch entstehenden Gleichungen Kternen vor, welche zwar Verbindungen zu zweien aber keine höheren Verbindungen aus diesen Elementen und auch nicht das Element k enthalten, d. h. Kternen, welche zur zweiten Klasse gehören und daher bekannt sind, und neben diesen nur Kternen der ersten Klasse. Mithin sind auch die auf der rechten Seite stehenden Kternen bekannt, d. h. alle, welche zur dritten Klasse gehören. Das System aller Gleichungen, durch welche diese Kternen bestimmt werden, heisse das System S'.

Um nun die Kternen der vierten Klasse zu finden, geht man von der im Systeme S' enthaltenen Gleichung aus, in welcher auf der rechten Seite die Kterne $(1, 2 \ldots k-4, k-1, k+1, k+2, k+3)$ steht. Auf der linken Seite dieser Gleichung kommen nur Kternen vor, die in die erste oder zweite Klasse gehören. Man vertausche nun in dieser Gleichung $k-1$ mit k; auf der linken Seite werden hierdurch Kternen eingeführt, welche neben dem Elemente k noch Paare von höheren Elementen enthalten, diese Kternen sind aber nun bekannt, da

sie zur dritten Klasse gehören, und man kennt daher auch die Kterne $(1, 2 \ldots k-4, k, k+1, k+2, k+3)$ welche nun auf der rechten Seite steht. Nimmt man jetzt statt $1, 2 \ldots k-4$, die übrigen Combinationen der $k-4$ten Klasse aus den Elementen $1, 2, \ldots k-1$, so findet man alle Kternen, in welchen $k, k+1, k+2, k+3$ als höchste Elemente vorkommen. Setzt man aber in den so gebildeten Gleichungen statt der drei Elemente $k+1, k+2, k+3$ alle übrigen Combinationen der dritten Klasse aus den Elementen $k+1, k+2 \ldots k+n$, so erscheinen in den hierdurch entstehenden Gleichungen auf der linken Seite keine Kternen, welche zu einer höheren Klasse als zur dritten gehören und man findet demnach, vermittelst dieser Gleichungen, alle Kternen, in welchen als höchste Elemente k und irgend eine Verbindung zu dreien aus den Elementen $k+1 \ldots k+n$ vorkommt.

Man nimmt nun die Gleichung, in welcher auf der rechten Seite die Kterne $(1, 2, \ldots k-4, k, k+2, k+3, k+4)$ steht und vertauscht die Elemente k und $k+1$ mit einander. Auf der linken Seite werden hierdurch wieder nur Kternen, welche zur dritten Klasse gehören, eingeführt, auf der rechten Seite erhält man die Kterne $(1, 2 \ldots k-4, k+1, k+2, k+3, k+4)$. Indem man nun statt $1, 2 \ldots k-4$ alle Combinationen der Klasse $k-4$ aus den Elementen $1, 2 \ldots k-1$ setzt und zugleich statt $k+1, k+2, k+3, k+4$ alle Combinationen der vierten Klasse, welche sich aus $k+1 \ldots k+n$ bilden lassen, findet man schliesslich alle Kternen, die sich aus den Combinationen der $k-4$ Klasse aus den Elementen $1, 2 \ldots k-1$, und den Combinationen der 4ten Klasse aus den Elementen $k, k+1, \ldots k+n$ zusammen setzen lassen, d. h. also alle Kternen der vierten Klasse, da in allen hierzu erforderlichen Gleichungen auf der linken Seite nur bekannte Kternen vorkommen.

Man sieht wie sich nun, indem man immer dasselbe Verfahren beobachtet, aus den bekannten Kternen der vierten Klasse wieder die Kternen der fünften Klasse, d. h. also diejenigen in welchen die Combinationen der Klasse $k-5$ aus $1, 2 \ldots k-1$ mit den Combinationen der 5ten Klasse $k, k+1 \ldots k+n$ verbunden sind, finden lassen, und

dass man überhaupt, immer so weiter gehend, alle Kternen aus den Elementen $1, 2 \ldots k + n$, vermittelst der als bekannt vorausgesetzten $kn + 1$ Kternen der ersten Klasse finden kann.

Setzt man nun n statt $n + k$ also $n - k$ statt n, so folgt, dass man alle übrigen Kternen aus den Elementen $1, 2 \ldots n$ vermittelst der als bekannt vorausgesetzten $k(n-k)+1$ Kternen der ersten Klasse finden kann, welche jetzt alle Kternen umfasst, die entweder die Elemente $k, k + 1, \ldots n$ einzeln, oder das Element k und zugleich eines der Elemente $k + 1, k + 2, \ldots n$ enthalten. Hiermit ist der in § 4 ausgesprochene Satz bewiesen. Setzt man aber $n = 2k$, so werden demnach alle übrigen Kternen aus den Elementen $1, 2 \ldots 2k$ vermittelst der als bekannt vorausgesetzten $k^2 + 1$ Kternen der ersten Klasse gefunden, was mit dem am Ende des § 3 ausgesprochenen Satze übereinstimmt.

In § 6 wurde zuerst $n = k + 2$ gesetzt, der allgemeine Satz des § 4 behält aber auch noch seine Geltung wenn $n = k + 1$ oder $n = k$. Ist $n = k + 1$ so ist $k(n - k) + 1 = k + 1$; in diesem Falle sollen alle Kternen aus den Elementen $1, 2 \ldots k + 1$ gebildet werden, ihre Anzahl ist $k + 1$, sie gehören aber alle in die erste Klasse, da in einer jeden entweder die einzelnen Elemente k und $k + 1$ oder beide zugleich vorkommen müssen, d. h. also in diesem Falle lässt sich keine Kterne aus anderen als bekannt vorausgesetzten berechnen, sie müssen vielmehr alle gegeben seyn. Ist $n = k$ so ist $k(n - k) + 1 = 1$; in diesem Falle hat man aber auch nur eine einzige Kterne.

9.

Man hat bis jetzt die Bedingungsgleichungen, welche zwischen den Kternen aus $2k$ Elementen statt haben nur bis zu $k = 3$ entwickelt. Um die leichte Anwendung der im Vorhergehenden besprochenen Methode noch an einem Beispiele zu zeigen, will ich die Bedingungsgleichungen für $k = 4$ entwickeln, wo es sich also um die Quaternen aus

den Elementen 1, 2 . . . 8 handelt. Dies entspricht mithin dem Falle wenn man (§ 2)

$$V = f(x, y, y_1, y_2, y_3, y_4)$$

hat. Hier müssen die 17 Quaternen erster Klasse

1234, 1235, 1236, 1237, 1238, 1245, 1246, 1247, 1248, 1345, 1346, 1347, 1348, 2345, 2346, 2347, 2348

gegeben seyn und es müssen aus ihnen die 53 übrigen Quaternen durch ebensoviel Bedingungsgleichungen gefunden werden. Die Grundgleichung ist in diesem Falle

1) 1234, 1235, 1236, 1245, 1246 = 1256

hieraus folgt

2) 1234, 1235, 1236, 1345, 1346 = 1356
3) 1234, 1235, 1236, 2345, 2346 = 2356
4) 1234, 1235, 1237, 1245, 1247 = 1257
5) 1234, 1235, 1237, 1345, 1347 = 1357
6) 1234, 1235, 1237, 2345, 2347 = 2357
7) 1234, 1235, 1238, 1245, 1248 = 1258
8) 1234, 1235, 1238, 1345, 1348 = 1358
9) 1234, 1235, 1238, 2345, 2348 = 2358
10) 1234, 1236, 1237, 1246, 1247 = 1267
11) 1234, 1236, 1237, 1346, 1347 = 1367
12) 1234, 1236, 1237, 2346, 2347 = 2367
13) 1234, 1236, 1238, 1246, 1248 = 1268
14) 1234, 1236, 1238, 1346, 1348 = 1368
15) 1234, 1236, 1238, 2346, 2348 = 2368
16) 1234, 1237, 1238, 1247, 1248 = 1278
17) 1234, 1237, 1238, 1347, 1348 = 1378
18) 1234, 1237, 1238, 2347, 2348 = 2378

wodurch die Quaternen zweiter Klasse gefunden sind. Man hat ferner (aus der Gleichung 2)

19) 1234, 1245, 1246, 1345, 1346 = 1456

20) 1234, 1245, 1246, 2345, 2346 = 2456
21) 1234, 1345, 1346, 2345, 2346 = 3456
22) 1234, 1245, 1247, 1345, 1347 = 1457
23) 1234, 1245, 1247, 2345, 2347 = 2457
24) 1234, 1345, 1347, 2345, 2347 = 3457
25) 1234, 1245, 1248, 1345, 1348 = 1458
26) 1234, 1245, 1248, 2345, 2348 = 2458
27) 1234, 1345, 1348, 2345, 2348 = 3458
28) 1234, 1246, 1247, 1346, 1347 = 1467
29) 1234, 1246, 1247, 2346, 2347 = 2467
30) 1234, 1346, 1347, 2346, 2347 = 3467
31) 1234, 1246, 1248, 1346, 1348 = 1468
32) 1234, 1246, 1248, 2346, 2348 = 2468
33) 1234, 1346, 1348, 2346, 2348 = 3468
34) 1234, 1247, 1248, 1347, 1348 = 1478
35) 1234, 1247, 1248, 2347, 2348 = 2478
36) 1234, 1347, 1348, 2347, 2348 = 3478
37) 1234, 1256, 1257, 1356, 1357 = 1567
38) 1234, 1256, 1257, 2356, 2357 = 2567
39) 1234, 1356, 1357, 2356, 2357 = 3567
40) 1234, 1256, 1258, 1356, 1358 = 1568
41) 1234, 1256, 1258, 2356, 2358 = 2568
42) 1234, 1356, 1358, 2356, 2358 = 3568
43) 1234, 1257, 1258, 1357, 1358 = 1578
44) 1234, 1257, 1258, 2357, 2358 = 2578
45) 1234, 1357, 1358, 2357, 2358 = 3578
46) 1234, 1267, 1268, 1367, 1368 = 1678
47) 1234, 1267, 1268, 2367, 2368 = 2678
48) 1234, 1367, 1368, 2367, 2368 = 3678

hierdurch sind die Quaternen dritter Klasse bestimmt; in den Gleichungen 37 bis 48 kommen auf der linken Seite auch Quaternen zweiter Klasse vor.

Nun hat man noch um die Quaternen vierter Klasse zu bestimmen (aus Gleichung 39) die folgenden fünf Gleichungen, in welchen auf der linken Seite auch Quaternen dritter Klasse vorkommen, nemlich .

49) 1234, 1456, 1457, 2456, 2457 = 4567
50) 1234, 1456, 1458, 2456, 2458 = 4568
51) 1234, 1457, 1458, 2457, 2458 = 4578
52) 1234, 1467, 1468, 2467, 2468 = 4678
53) 1235, 1567, 1568, 2567, 2568 = 5678.

10.

In der Gleichung D) besteht jedes Glied aus zwei Faktoren; in dem zweiten Faktor aller Glieder kommen gleichmässig die Elemente $k+2, k+3, \ldots 2k$ vor, welchen aber noch in den einzelnen Gliedern die einzelnen Elemente $1, 2, \ldots k+1$ voran gehen. Setzt man daher jede der $k+1$ Grössen

$$h_{1,1}\ h_{2,1}\ \ldots\ h_{k+1,1}$$

der Einheit gleich und ferner

$$\begin{array}{llll} h^{k+2,1} = 0 & h_{k+2,2} = 1 & & \\ h_{k+3,1} = 0 & h_{k+3,2} = 0 & h_{k+3,3} = 1 & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \\ h_{2k,1} = 0 & h_{2k,2} = 0 & h_{2k,k-1} = 0 & h_{2k,k} = 1 \end{array}$$

so ist nun jede Kterne von der Form $(\alpha, k+2, k+3, \ldots 2k) = 1$ so bald α eine der Zahlen $1, 2, \ldots k+1$ bedeutet. Unter diesen Voraussetzungen geht also D) in

$$(k+1,2,3,\ldots k)+(1,k+1,3,4\ldots k)+(1,2,k+1,4,5\ldots k)\ldots+(1,2,\ldots k-1,k+1) = (1,2\ldots k)$$

über, was durch die symbolische Gleichung

$$G)\quad (1.2\ldots k),\ (1,2,\ldots k-1,k+1),\ \ldots (1,3,4\ldots k,k+1) = (2,3\ldots k,k+1)$$

ausgedrückt werden soll.

Diese Gleichung gilt also immer, sobald die Elemente $h_{1,1}$ $h_{2,1}$ . . . $h_{k+1,1}$ der Einheit gleich sind, während die übrigen darin erscheinenden Elemente jeden beliebigen Werth haben können. Setzt man noch ausserdem $h_{k+2,1} = 1$ so gilt diese Gleichung mithin auch dann noch, wenn man in derselben $k + 1$ statt k setzt, u. s. w. Zugleich behält die Gleichung F), da sie für jeden Werth der Elemente statt hat, auch unter den gegenwärtigen Voraussetzungen, ihre Gültigkeit. Hieraus ergiebt sich folgender Satz:

Wenn man aus den k Elementenreihen C) alle Determinanten von der Form B) bildet, wie in § 4, es ist aber zugleich allgemein $h_{m,1} = 1$, wo m eine der Zahlen 1, 2 . . . n bedeutet, so findet man aus den Werthen von $(k - 1)(n - k) + 1$ dieser Determinanten, welche man als gegeben voraus setzt, die Werthe aller übrigen, so dass man also in diesem besonderen Falle $(n - k)$ Determinanten weniger zu kennen braucht, als im allgemeinen Falle. Es folgt dies unmittelbar daraus, dass man jetzt, vermittelst der Gleichung G), wenn man die auf der linken Seite stehenden Determinanten kennt, daraus die $n - k$ Determinanten $(2, 3, \ldots k - 1, k, k + 1)$, $(2, 3 \ldots k - 1, k + 1, k + 2)$ . . . . $(2, 3 \ldots k - 1, n - 1, n)$ findet, und daher ebensoviel Determinanten weniger als bekannt voraus zu setzen braucht. In der That ist es hier nur nöthig, dass man ausser der Kterne $(1, 2 \ldots k)$ noch die Kternen kennt, in welchen das Element 1 mit den Combinationen der $k - 2$ Klasse aus den Elementen 2, 3, . . . $k - 1$ und einem der Elemente $k + 1, \ldots n$ verbunden ist, was im Ganzen $(k-1)(n-k) + 1$ Kternen giebt.

Ist $k = 3$ so dass C) aus den drei Reihen

$$\begin{matrix} h_{1,1} & h_{2,1} & \ldots & h_{n,1} \\ h_{1,2} & h_{2,2} & \ldots & h_{n,2} \\ h_{1,3} & h_{2,3} & \ldots & h_{n,3} \end{matrix}$$

besteht, so braucht man daher von den Determinanten der Form $(r_1\, r_2\, r_3)$ d. h. der Form

L*

$$\begin{vmatrix} 1 & h_{r_1,2} & h_{r_1,3} \\ 1 & h_{r_2,2} & h_{r_2,3} \\ 1 & h_{r_3,2} & h_{r_3,3} \end{vmatrix}$$

nur $2n - 5$ zu kennen, um die übrigen zu finden.

Hat man also n Punkte in einer Ebene, von welchen nicht 3 in einer geraden Linie liegen und die durch die Zahlen 1, 2 . . . n bezeichnet werden mögen, und drückt $h_{m,2}$ die Abscisse und $h_{m,3}$ die Ordinate des Punktes m aus, auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem bezogen, so bedeutet $(r_1 r_2 r_3)$ den doppelten Flächeninhalt des Dreiecks, welches zwischen den Punkten r_1, r_2, r_3 liegt (abgesehen vom Zeichen). Setzt man für $r_1 r_2 r_3$ sämmtliche Combinationen der dritten Klasse, welche sich aus den Elementen $1, 2 \dots n$ bilden lassen, so drücken die entsprechenden Determinanten den doppelten Flächeninhalt der verschiedenen Dreiecke aus, die man erhält, indem man je drei der Punkte 1, 2 . . . n als die Spitzen eines Dreiecks betrachtet. Aus dem als bekannt vorausgesetzten Werthe der Flächeninhalte von $2n - 5$ dieser Dreiecke kann man also den Inhalt jedes der übrigen finden.

Ist ferner $k = 4$ so dass $C)$ aus den vier Reihen

$$\begin{matrix} h_{1,1} & h_{2,1} & \dots & h_{n,1} \\ h_{1,2} & h_{2,2} & \dots & h_{n,2} \\ h_{1,3} & h_{2,3} & \dots & h_{n,3} \\ h_{1,4} & h_{2,4} & \dots & h_{n,4} \end{matrix}$$

besteht, so muss man von den Determinanten

$$(r_1\ r_2\ r_3\ r_4) = \begin{vmatrix} 1 & h_{r_1,2} & h_{r_1,3} & h_{r_1,4} \\ 1 & h_{r_2,2} & h_{r_2,3} & h_{r_2,4} \\ 1 & h_{r_3,2} & h_{r_3,3} & h_{r_3,4} \\ 1 & h_{r_4,2} & h_{r_4,3} & h_{r_4,4} \end{vmatrix}$$

$3n - 11$ kennen, um die übrigen zu finden.

Hat man nun die n Punkte 1, 2, . . . n im Raume, von welchen

nicht 4 in einer Ebene liegen und sind $h_{m,2}$ $h_{m,3}$ $h_{m,4}$ die drei rechtwinkligen Coordinaten des Punktes m, so bedeutet $(r_1\ r_2\ r_3\ r_4)$ den sechsfachen Inhalt des Tetraeders, dessen Ecken die Punkte r_1, r_2, r_3, r_4 sind (abgesehen vom Zeichen). Indem man also für $r_1\ r_2\ r_3\ r_4$ sämmtliche Combinationen der 4ten Klasse aus den Elementen $1, 2 \ldots n$ nimmt, drücken die entsprechenden Determinanten den sechsfachen Inhalt der Tetraeder aus, deren Ecken je vier beliebige der n Punkte sind. Aus dem als gegeben vorausgesetzten Werthe der Inhalte von $3n - 11$ dieser Tetraeder findet man also den Inhalt jedes der übrigen.

Diese zwei geometrischen Sätze hat schon Moebius gefunden *).

11.

Wenn man aus einer Determinante

$$R = \begin{vmatrix} h_{1,1} & h_{2,1} & \ldots & h_{n,1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ h_{1,n} & h_{2,n} & \ldots & h_{n,n} \end{vmatrix}$$

die sämmtlichen Unterdeterminanten vom Grade k bildet, welche mithin in der Form

$$\begin{vmatrix} h_{r_1,s_1} & h_{r_2,s_1} & \ldots & h_{r_k,s_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ h_{r_1,s_k} & h_{r_2,s_k} & \ldots & h_{r_k,s_k} \end{vmatrix}$$

enthalten sind, wo man sowohl für $r_1, r_2 \ldots r_k$ als für $s_1, s_2 \ldots s_k$ alle Combinationen der $k$ten Klasse aus $1, 2 \ldots n$ zu setzen hat, so ist deren Anzahl $\left(\frac{n \,.\, n-1 \ldots n-k+1}{1 \,.\, 2 \ldots k}\right)^2$. Nimmt man nun für $s_1, s_2 \ldots s_k$ die bestimmte Combination $1, 2 \ldots k$ so heisst dies, man bildet alle Determinanten vom Grade k aus den Elementenreihen

$$\begin{matrix} h_{1,1} & h_{2,1} & \ldots & h_{n,1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ h_{1,k} & h_{2,k} & \ldots & h_{n,k} \end{matrix}$$

*) Der barycentrische Calcul § 164 und § 167.

Nun kann man aus $k(n-k)+1$ dieser Determinanten alle übrigen finden. Da nun dasselbe gelten muss, wenn man irgend eine andere Combination für $s_1\ s_2 \ldots s_k$ setzt, so folgt hieraus dass man aus $[k(n-k)+1]\left[\frac{n \,.\, n-1 \ldots n-k+1}{1 \,.\, 2 \,.\,.\, k}\right]$ gegebenen Unterdeterminanten des Grades k der Determinante R alle übrigen Unterdeterminanten dieses Grades finden kann.

Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe.

Von

B. Riemann.

Aus dem Nachlass des Verfassers mitgetheilt durch R. Dedekind *).

Der folgende Aufsatz über die trigonometrischen Reihen besteht aus zwei wesentlich verschiedenen Theilen. Der erste Theil enthält eine Geschichte der Untersuchungen und Ansichten über die willkührlichen (graphisch gegebenen) Functionen und ihre Darstellbarkeit durch trigonometrische Reihen. Bei ihrer Zusammenstellung war es mir vergönnt, einige Winke des berühmten Mathematikers zu benutzen, welchem man die erste gründliche Arbeit über diesen Gegenstand verdankt. Im zweiten Theile liefere ich über die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe eine Untersuchung, welche auch die bis jetzt noch unerledigten Fälle umfasst. Es war nöthig, ihr einen kurzen Aufsatz über den Begriff eines bestimmten Integrales und den Umfang seiner Gültigkeit voraufzuschicken.

---

*) Diese Abhandlung ist im Jahre 1854 von dem Verfasser behuf seiner Habilitation an der Universität zu Göttingen der philosophischen Facultät eingereicht. Wiewohl der Verfasser ihre Veröffentlichung, wie es scheint, nicht beabsichtigt hat, so wird doch die hiermit erfolgende Herausgabe derselben in gänzlich ungeänderter Form sowohl durch das hohe Interesse des Gegenstandes an sich als durch die in ihr niedergelegte Behandlungsweise der wichtigsten Principien der Infinitesimal-Analysis wohl hinlänglich gerechtfertigt erscheinen.

Braunschweig, im Juli 1867.

R. Dedekind.

Geschichte der Frage über die Darstellbarkeit einer willkührlich gegebenen Function durch eine trigonometrische Reihe.

1.

Die von Fourier so genannten trigonometrischen Reihen, d. h. die Reihen von der Form

$$a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + a_3 \sin 3x + \ldots$$
$$\tfrac{1}{2} b_0 + b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + b_3 \cos 3x + \ldots$$

spielen in demjenigen Theile der Mathematik, wo ganz willkührliche Functionen vorkommen, eine bedeutende Rolle; ja, es lässt sich mit Grund behaupten, dass die wesentlichsten Fortschritte in diesem für die Physik so wichtigen Theile der Mathematik von der klareren Einsicht in die Natur dieser Reihen abhängig gewesen sind. Schon gleich bei den ersten mathematischen Untersuchungen, die auf die Betrachtung willkührlicher Functionen führten, kam die Frage zur Sprache, ob sich eine solche ganz willkührliche Function durch eine Reihe von obiger Form ausdrücken lasse.

Es geschah dies in der Mitte des vorigen Jahrhunderts bei Gelegenheit der Untersuchungen über die schwingenden Saiten, mit welchen sich damals die berühmtesten Mathematiker beschäftigten. Ihre Ansichten über unsern Gegenstand lassen sich nicht wohl darstellen, ohne auf dieses Problem einzugehen.

Unter gewissen Voraussetzungen, die in der Wirklichkeit näherungsweise zutreffen, wird bekanntlich die Form einer gespannten in einer Ebene schwingenden Saite, wenn x die Entfernung eines unbestimmten ihrer Punkte von ihrem Anfangspunkte, y seine Entfernung aus der Ruhelage zur Zeit t bedeutet, durch die partielle Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \alpha\alpha \frac{d^2y}{dx^2}$$

bestimmt, wo α von t und bei einer überall gleich dicken Saite von x unabhängig ist.

Der erste, welcher eine allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung gab, war d'Alembert.

Er zeigte [1]), dass jede Function von x und t, welche für y gesetzt, die Gleichung zu einer identischen macht, in der Form

$$f\,(x + at) + \varphi\,(x - at)$$

enthalten sein müsse, wie sich dies durch Einführung der unabhängig veränderlichen Grössen $x + at$, $x - at$ anstatt x, t ergiebt, wodurch

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{1}{\alpha\alpha}\,\frac{d^2y}{dt^2} \text{ in } 4\,\frac{d\,\dfrac{dy}{d\,(x + at)}}{d\,(x\;at)}$$

übergeht.

Ausser dieser partiellen Differentialgleichung, welche sich aus den allgemeinen Bewegungsgesetzen ergiebt, muss nun y noch die Bedingung erfüllen, in den Befestigungspunkten der Saite stets $= 0$ zu sein; man hat also, wenn in dem einen dieser Punkte $x = 0$, in dem andern $x = l$ ist,

$$f\,(at) = -\,\varphi\,(-\,at),\; f\,(l + at) = -\,\varphi\,(l - at)$$

und folglich

$$f\,(z) = -\,\varphi\,(-\,z) = -\,\varphi\,(l - (l + z)) = f\,(2l + z)$$
$$y = f\,(at + x) - f\,(at - x)$$

Nachdem d'Alembert dies für die allgemeine Lösung des Problems geleistet hatte, beschäftigt er sich in einer Fortsetzung [2]) seiner Abhandlung mit der Gleichung $f\,(z) = f\,(2l + z)$; d. h. er sucht analytische Ausdrücke, welche unverändert bleiben, wenn z um $2l$ wächst.

Es war ein wesentliches Verdienst Euler's, der im folgenden Jahrgange der Berliner Abhandlungen [3]) eine neue Darstellung dieser d'Alembert'schen Arbeiten gab, dass er das Wesen der Bedingungen, welchen die Function $f\,(z)$ genügen muss, richtiger erkannte. Er bemerkte, dass

1) Mémoires de l'académie de Berlin. 1747. pag. 214.

2) Ibid. pag. 220.

3) Mémoires de l'académie de Berlin. 1748. pag. 69.

der Natur des Problems nach die Bewegung der Saite vollständig bestimmt sei, wenn für irgend einen Zeitpunkt die Form der Saite und die Geschwindigkeit jedes Punktes $\left(\text{also } y \text{ und } \frac{dy}{dt}\right)$ gegeben seien, und zeigte, dass sich, wenn man diese beiden Functionen sich durch willkührlich gezogene Curven bestimmt denkt, daraus stets durch eine einfach geometrische Construction die d'Alembert'sche Function $f(s)$ finden lässt. In der That, nimmt man an, dass für $t = 0$, $y = g(x)$ und $\frac{dy}{dt} = h(x)$ sei, so erhält man für die Werthe von x zwischen 0 und l

$$f(x) - f(-x) = g(x),\ f(x) + f(-x) = \frac{1}{a}\int h(x)\,dx$$

und folglich die Function $f(s)$ zwischen $-l$ und l; hieraus aber ergiebt sich ihr Werth für jeden andern Werth von s vermittelst der Gleichung $f(s) = f(2l + s)$. Dies ist in abstracten, aber jetzt allgemein geläufigen Begriffen dargestellt, die Euler'sche Bestimmung der Function $f(s)$.

Gegen diese Ausdehnung seiner Methode durch Euler verwahrte sich indess d'Alembert sofort [1], weil seine Methode nothwendig voraussetze, dass y sich in t und x analytisch ausdrücken lasse.

Ehe eine Antwort Euler's hierauf erfolgte, erschien eine dritte von diesen beiden ganz verschiedene Behandlung dieses Gegenstandes von Daniel Bernoulli [2]. Schon vor d'Alembert hatte Taylor [3] gesehen, dass $\frac{d^2y}{dt^2} = aa\frac{d^2y}{dx^2}$ und zugleich y für $x = 0$ und für $x = l$ stets gleich 0 sei, wenn man $y = \sin\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{n\pi a t}{l}$ und hierin für n eine ganze Zahl

1) Mémoires de l'académie de Berlin. 1750. pag. 358. En effet on ne peut ce me semble exprimer y analytiquement d'une manière plus générale, qu' en la supposant une fonction de t et de x. Mais dans cette supposition on ne trouve la solution du problème que pour les cas où les différentes figures de la corde vibrante peuvent être renfermées dans une seule et même équation.

2) Mémoires de l'académie de Berlin. 1753. p. 147.

3) Taylor de methodo incrementorum.

setze. Er erklärte hieraus die physikalische Thatsache, dass eine Saite ausser ihrem Grundtone auch den Grundton einer $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, ... so langen (übrigens ebenso beschaffenen) Saite geben könne, und hielt seine particuläre Lösung für allgemein, d. h. er glaubte, die Schwingung der Saite würde stets, wenn die ganze Zahl n der Höhe des Tons gemäss bestimmt würde, wenigstens sehr nahe durch die Gleichung ausgedrückt. Die Beobachtung, dass eine Saite ihre verschiedenen Töne gleichzeitig geben könne, führte nun Bernoulli zu der Bemerkung, dass die Saite (der Theorie nach) auch der Gleichung

$$y = \Sigma\, a_n \sin\frac{n\pi x}{l} \cos\frac{n\pi\alpha}{l}(t - \beta_n)$$

gemäss schwingen könne, und weil sich aus dieser Gleichung alle beobachteten Modificationen der Erscheinung erklären liessen, so hielt er sie für die allgemeinste [1]). Um diese Ansicht zu stützen, untersuchte er die Schwingungen eines masselosen gespannten Fadens, der in einzelnen Punkten mit endlichen Massen beschwert ist, und zeigte, dass die Schwingungen desselben stets in eine der Zahl der Punkte gleiche Anzahl von solchen Schwingungen zerlegt werden kann, deren jede für alle Massen gleich lange dauert.

Diese Arbeiten Bernoulli's veranlassten einen neuen Aufsatz Euler's, welcher unmittelbar nach ihnen unter den Abhandlungen der Berliner Akademie abgedruckt ist [2]). Er hält darin d'Alembert gegenüber fest [3]), dass die Function $f(z)$ eine zwischen den Grenzen $-l$ und l ganz willkührliche sein könne, und bemerkt [4]), dass Bernoulli's Lösung (welche er schon früher als eine besondere aufgestellt hatte) dann allgemein sei und zwar nur dann allgemein sei, wenn die Reihe

1) l. c. p. 157. art. XIII.

2) Mémoires de l'académie de Berlin. 1753. pag. 196.

3) l. c. pag. 214.

4) l. c. art. III—X.

$$a_1 \sin \frac{x\pi}{l} + a_2 \sin \frac{2x\pi}{l} + \dots$$
$$\tfrac{1}{2} b_0 + b_1 \cos \frac{x\pi}{l} + b_2 \cos \frac{2x\pi}{l} + \dots$$

für die Abscisse x die Ordinate einer zwischen den Abscissen o und l ganz willkührlichen Curve darstellen könne. Nun wurde es damals von Niemand bezweifelt, dass alle Umformungen, welche man mit einem analytischen Ausdrucke — er sei endlich oder unendlich — vornehmen könne, für jedwede Werthe der unbestimmten Grössen gültig seien oder doch nur in ganz speciellen Fällen unanwendbar würden. Es schien daher unmöglich, eine algebraische Curve oder überhaupt eine analytisch gegebene nicht periodische Curve durch obigen Ausdruck darzustellen, und Euler glaubte daher, die Frage gegen Bernoulli entscheiden zu müssen.

Der Streit zwischen Euler und d'Alembert war indess noch immer unerledigt. Dies veranlasste einen jungen, damals noch wenig bekannten Mathematiker, Lagrange, die Lösung der Aufgabe auf einem ganz neuen Wege zu versuchen, auf welchem er zu Euler's Resultaten gelangte. Er unternahm es [1], die Schwingungen eines masselosen Fadens zu bestimmen, welcher mit einer endlichen unbestimmten Anzahl gleich grosser Massen in gleich grossen Abständen beschwert ist, und untersuchte dann, wie sich diese Schwingungen ändern, wenn die Anzahl der Massen in's Unendliche wächst. Mit welcher Gewandtheit, mit welchem Aufwande analytischer Kunstgriffe er aber auch den ersten Theil dieser Untersuchung durchführte, so liess der Uebergang vom Endlichen zum Unendlichen doch viel zu wünschen übrig, so dass d'Alembert in einer Schrift, welche er an die Spitze seiner opuscules mathématiques stellte, fortfahren konnte, seiner Lösung den Ruhm der grössten Allgemeinheit zu vindiciren. Die Ansichten der damaligen berühmten Mathematiker waren und blieben daher in dieser Sache getheilt; denn auch in spätern Arbeiten behielt jeder im Wesentlichen seinen Standpunkt bei.

Um also schliesslich ihre bei Gelegenheit dieses Problems entwickelten Ansichten über die willkührlichen Functionen und über die Darstell-

1) Miscellanea Taurinensia. Tom. I. Recherches sur la nature et la propagation du son.

barkeit derselben durch eine trigonometrische Reihe zusammenzustellen, so hatte Euler zuerst diese Functionen in die Analysis eingeführt und, auf geometrische Anschauung gestützt, die Infinitesimalrechnung auf sie angewandt. Lagrange [1]) hielt Euler's Resultate (seine geometrische Construction des Schwingungsverlaufs) für richtig; aber ihm genügte die Euler'sche geometrische Behandlung dieser Functionen nicht. D'Alembert [2]) dagegen ging auf die Euler'sche Auffassungsweise der Differentialrechnung ein und beschränkte sich, die Richtigkeit seiner Resultate anzufechten, weil man bei ganz willkührlichen Functionen nicht wissen könne, ob ihre Differentialquotienten stetig seien. Was die Bernoulli'sche Lösung betraf, so kamen alle drei darin überein, sie nicht für allgemein zu halten; aber während d'Alembert [3]), um Bernoulli's Lösung für minder allgemein, als die seinige, erklären zu können, behaupten musste, dass auch eine analytisch gegebene periodische Function sich nicht immer durch eine trigonometrische Reihe darstellen lasse, glaubte Lagrange [4]) diese Möglichkeit beweisen zu können.

2.

Fast funfzig Jahre vergingen, ohne dass in der Frage über die analytische Darstellbarkeit willkührlicher Functionen ein wesentlicher Fortschritt gemacht wurde. Da warf eine Bemerkung Fourier's ein neues Licht auf diesen Gegenstand; eine neue Epoche in der Entwicklung dieses Theils der Mathematik begann, die sich bald auch äusserlich in grossartigen Erweiterungen der mathematischen Physik kund that. Fourier bemerkte, dass in der trigonometrischen Reihe

$$f(x) = \begin{cases} \phantom{\tfrac{1}{2} b_0 +{}} a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \dots \\ \tfrac{1}{2} b_0 + b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + \dots \end{cases}$$

1) Miscellanea Taurinensia. Tom. II. Pars math. pag. 18.

2) Opuscules mathématiques p. d'Alembert. Tome premier. 1761. pag. 16. art. VII—XX.

3) Opuscules mathématiques. Tome I. pag. 42. art. XXIV.

4) Misc. Taur. Tom. III. Pars math. pag. 221. art. XXV.

die Coefficienten sich durch die Formeln

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx,\quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx$$

bestimmen lassen. Er sah, dass diese Bestimmungsweise auch anwendbar bleibe, wenn die Function $f(x)$ ganz willkührlich gegeben sei; er setzte für $f(x)$ eine so genannte discontinuirliche Function (die Ordinate einer gebrochenen Linie für die Abscisse x) und erhielt so eine Reihe, welche in der That stets den Werth der Function gab.

Als Fourier in einer seiner ersten Arbeiten über die Wärme, welche er der französischen Akademie vorlegte [1], (21. Dec. 1807) zuerst den Satz aussprach, dass eine ganz willkührlich (graphisch) gegebene Function sich durch eine trigonometrische Reihe ausdrücken lasse, war diese Behauptung dem greisen Lagrange so unerwartet, dass er ihr auf das Entschiedenste entgegentrat. Es soll [2] sich hierüber noch ein Schriftstück im Archiv der Pariser Akademie befinden. Dessenungeachtet verweist [3] Poisson überall, wo er sich der trigonometrischen Reihen zur Darstellung willkührlicher Functionen bedient, auf eine Stelle in Lagrange's Arbeiten über die schwingenden Saiten, wo sich diese Darstellungsweise finden soll. Um diese Behauptung, die sich nur aus der bekannten Rivalität zwischen Fourier und Poisson erklären lässt [4], zu widerlegen, sehen wir uns genöthigt, noch einmal auf die Abhandlung Lagrange's zurückzukommen; denn über jenen Vorgang in der Akademie findet sich nichts veröffentlicht.

Man findet in der That an der von Poisson citirten Stelle [5] die Formel:

$$y = 2\int Y \sin X\pi\, dX \times \sin x\pi + 2\int Y \sin 2X\pi\, dX \times \sin 2x\pi$$
$$+ 2\int Y \sin 3X\pi\, dX \times \sin 3x\pi + \text{etc.} + 2\int Y \sin nX\pi\, dX \sin nx\pi,$$

1) Bulletin des sciences p. la soc. philomatique Tome I. p. 112.

2) Nach einer mündlichen Mittheilung des Herrn Professor Dirichlet.

3) Unter Andern in dem verbreiteten Traité de mécanique Nro. 323. p. 638.

4) Der Bericht im bulletin des sciences über die von Fourier der Akademie vorgelegte Abhandlung ist von Poisson.

5) Misc. Taur. Tom. III. Pars math. pag. 261.

de sorte que, lorsque $x = X$, on aura $y = Y$, Y étant l'ordonnée qui répond à l'abscisse X.

Diese Formel sieht nun allerdings ganz so aus wie die Fourier'sche Reihe; so dass bei flüchtiger Ansicht eine Verwechselung leicht möglich ist; aber dieser Schein rührt bloss daher, weil Lagrange das Zeichen $\int dX$ anwandte, wo er heute das Zeichen $\Sigma \Delta X$ angewandt haben würde. Sie giebt die Lösung der Aufgabe, die endliche Sinusreihe

$$a_1 \sin x\pi + a_2 \sin 2x\pi + \ldots + a_n \sin nx\pi$$

so zu bestimmen, dass sie für die Werthe $\frac{1}{n+1}, \frac{2}{n+1}, \ldots, \frac{n}{n+1}$ von x, welche Lagrange unbestimmt durch X bezeichnet, gegebene Werthe erhält. Hätte Lagrange in dieser Formel n unendlich gross werden lassen, so wäre er allerdings zu dem Fourier'schen Resultat gelangt. Wenn man aber seine Abhandlung durchliest, so sieht man, dass er weit davon entfernt ist zu glauben, eine ganz willkührliche Function lasse sich wirklich durch eine unendliche Sinusreihe darstellen. Er hatte vielmehr die ganze Arbeit gerade unternommen, weil er glaubte, diese willkührlichen Functionen liessen sich nicht durch eine Formel ausdrücken, und von der trigonometrischen Reihe glaubte er, dass sie jede analytisch gegebene periodische Function darstellen könne. Freilich erscheint es uns jetzt kaum denkbar, dass Lagrange von seiner Summenformel nicht zur Fourier'schen Reihe gelangt sein sollte; aber dies erklärt sich daraus, dass durch den Streit zwischen Euler und d'Alembert sich bei ihm im Voraus eine bestimmte Ansicht über den einzuschlagenden Weg gebildet hatte. Er glaubte das Schwingungsproblem für eine unbestimmte endliche Anzahl von Massen erst vollständig absolviren zu müssen, bevor er seine Grenzbetrachtungen anwandte. Diese erfordern eine ziemlich ausgedehnte Untersuchung [1], welche unnöthig war, wenn er die Fourier'sche Reihe kannte.

Durch Fourier war nun zwar die Natur der trigonometrischen Rei-

1) Misc. Taur. Tom. III. Pars math. p. 251.

hen vollkommen richtig erkannt [1]); sie wurden seitdem in der mathematischen Physik zur Darstellung willkührlicher Functionen vielfach angewandt, und in jedem einzelnen Falle überzeugte man sich leicht, dass die Fourier'sche Reihe wirklich gegen den Werth der Function convergire; aber es dauerte lange, ehe dieser wichtige Satz allgemein bewiesen wurde.

Der Beweis, welchen Cauchy in einer der Pariser Akademie am 27. Febr. 1826 vorgelesenen Abhandlung gab [2]), ist unzureichend, wie Dirichlet gezeigt hat [3]). Cauchy setzt voraus, dass, wenn man in der willkührlich gegebenen periodischen Function $f(x)$ für x ein complexes Argument $x + yi$ setzt, diese Function für jeden Werth von y endlich sei. Dies findet aber nur Statt, wenn die Function gleich einer constanten Grösse ist. Man sieht indess leicht, dass diese Voraussetzung für die ferneren Schlüsse nicht nothwendig ist. Es reicht hin, wenn eine Function $\varphi(x + yi)$ vorhanden ist, welche für alle positiven Werthe von y endlich ist und deren reeller Theil für $y = 0$ der gegebenen periodischen Function $f(x)$ gleich wird. Will man diesen Satz, der in der That richtig ist [4]), voraussetzen, so führt allerdings der von Cauchy eingeschlagene Weg zum Ziele, wie umgekehrt dieser Satz sich aus der Fourier'schen Reihe ableiten lässt.

3.

Erst im Januar 1829 erschien im Journal von Crelle [5]) eine Abhandlung von Dirichlet, worin für Functionen, die durchgehends eine Integration zulassen und nicht unendlich viele Maxima und Minima haben, die Frage ihrer Darstellbarkeit durch trigonometrische Reihen in aller Strenge entschieden wurde.

1) Bulletin d. sc. Tom. I. p. 115. Les coefficients a, a', a'' . . . étant ainsi déterminés &c.

2) Mémoires de l'ac. d. sc. de Paris. Tom. VI. p. 603.

3) Crelle Journal für die Mathematik. Bd. IV. p. 157 & 158.

4) Der Beweis findet sich in der Inauguraldissertation des Verfassers.

5) Bd. IV. pag. 157.

Die Erkenntniss des zur Lösung dieser Aufgabe einzuschlagenden Weges ergab sich ihm aus der Einsicht, dass die unendlichen Reihen in zwei wesentlich verschiedene Klassen zerfallen, je nachdem sie, wenn man sämmtliche Glieder positiv macht, convergent bleiben oder nicht. In den ersteren können die Glieder beliebig versetzt werden, der Werth der letzteren dagegen ist von der Ordnung der Glieder abhängig. In der That, bezeichnet man in einer Reihe zweiter Klasse die positiven Glieder der Reihe nach durch

$$a_1, a_2, a_3, \ldots,$$

die negativen durch

$$-b_1, -b_2, -b_3, \ldots,$$

so ist klar, dass sowohl Σa, als Σb unendlich sein müssen; denn wären beide endlich, so würde die Reihe auch nach Gleichmachung der Zeichen convergiren; wäre aber eine unendlich, so würde die Reihe divergiren. Offenbar kann nun die Reihe durch geeignete Anordnung der Glieder einen beliebig gegebenen Werth C erhalten. Denn nimmt man abwechselnd so lange positive Glieder der Reihe, bis ihr Werth grösser als C wird, und so lange negative, bis ihr Werth kleiner als C wird, so wird die Abweichung von C nie mehr betragen, als der Werth des dem letzten Zeichenwechsel voraufgehenden Gliedes. Da nun sowohl die Grössen a, als die Grössen b mit wachsendem Index zuletzt unendlich klein werden, so werden auch die Abweichungen von C, wenn man in der Reihe nur hinreichend weit fortgeht, beliebig klein werden, d. h. die Reihe wird gegen C convergiren.

Nur auf die Reihen erster Klasse sind die Gesetze endlicher Summen anwendbar; nur sie können wirklich als Inbegriff ihrer Glieder betrachtet werden, die Reihen der zweiten Klasse nicht; ein Umstand, welcher von den Mathematikern des vorigen Jahrhunderts übersehen wurde, hauptsächlich wohl aus dem Grunde, weil die Reihen, welche nach steigenden Potenzen einer veränderlichen Grösse fortschreiten, allgemein zu reden (d. h. einzelne Werthe dieser Grösse ausgenommen), zur ersten Klasse gehören.

Die Fourier'sche Reihe gehört nun offenbar nicht nothwendig zur

ersten Klasse; ihre Convergenz konnte also gar nicht, wie Cauchy vergeblich [1]) versucht hatte, aus dem Gesetze, nach welchem die Glieder abnehmen, abgeleitet werden. Es musste vielmehr gezeigt werden, dass die endliche Reihe

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha)\sin\alpha d\alpha \sin x + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha)\sin 2\alpha d\alpha \sin 2x + \dots + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha)\sin n\alpha d\alpha \sin nx$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha)\,d\alpha + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha)\cos\alpha\,d\alpha\cos x + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha)\cos 2\alpha d\alpha\cos 2x + \dots + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha)\cos n\alpha d\alpha\cos nx$$

oder, was dasselbe ist, das Integral

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha)\,\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(x-\alpha)}{\sin\frac{x-\alpha}{2}}\,d\alpha$$

sich, wenn n in's Unendliche wächst, dem Werthe $f(x)$ unendlich annähert.

Dirichlet stützt diesen Beweis auf die beiden Sätze:

1) Wenn $0 < c \overline{\overline{<}} \frac{\pi}{2}$, nähert sich $\int_0^c \varphi(\beta)\frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta}d\beta$ mit wachsendem n zuletzt unendlich dem Werth $\frac{\pi}{2}\varphi(0)$;

2) wenn $0 < b < c \overline{\overline{<}} \frac{\pi}{2}$, nähert sich $\int_b^c \varphi(\beta)\frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta}d\beta$ mit wachsendem n zuletzt unendlich dem Werth 0;

---

1) Dirichlet in Crelle's Journal. Bd. IV. pag. 158. Quoi qu'il en soit de cette première observation, . . . à mesure que n croit.

vorausgesetzt, dass die Function $\varphi(\beta)$ zwischen den Grenzen dieser Integrale entweder immer abnimmt, oder immer zunimmt.

Mit Hülfe dieser beiden Sätze lässt sich, wenn die Function f nicht unendlich oft vom Zunehmen zum Abnehmen oder vom Abnehmen zum Zunehmen übergeht, das Integral

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha) \frac{\sin\frac{2n+1}{2}(x-\alpha)}{\sin\frac{x-\alpha}{2}} d\alpha$$

offenbar in eine endliche Anzahl von Gliedern zerlegen, von denen eins[1]) gegen $\frac{1}{2} f(x+0)$, ein anderes gegen $\frac{1}{2} f(x-0)$, die übrigen aber gegen 0 convergiren, wenn n ins Unendliche wächst.

Hieraus folgt, dass durch eine trigonometrische Reihe jede sich nach dem Intervall 2π periodisch wiederholende Function darstellbar ist, welche

1) durchgehends eine Integration zulässt,

2) nicht unendlich viele Maxima und Minima hat und

3) wo ihr Werth sich sprungweise ändert, den Mittelwerth zwischen den beiderseitigen Grenzwerthen annimmt.

Eine Function, welche die ersten beiden Eigenschaften hat, die dritte aber nicht, kann durch eine trigonometrische Reihe offenbar nicht dargestellt werden; denn die trigonometrische Reihe, die sie ausser den Unstetigkeiten darstellt, würde in den Unstetigkeitspunkten selbst von ihr abweichen. Ob und wann aber eine Function, welche die ersten beiden Bedingungen nicht erfüllt, durch eine trigonometrische Reihe darstellbar sei, bleibt durch diese Untersuchung unentschieden.

Durch diese Arbeit Dirichlet's ward einer grossen Menge wichtiger

---

1) Es ist nicht schwer zu beweisen, dass der Werth einer Function f, welche nicht unendlich viele Maxima und Minima hat, stets, sowohl wenn der Argumentwerth abnehmend, als wenn er zunehmend gleich x wird, entweder festen Grenzwerthen $f(x+0)$ und $f(x-0)$ (nach Dirichlet's Bezeichnung in Dove's Repertorium der Physik. Bd. 1. pag. 170) sich nähern, oder unendlich gross werden müsse.

analytischer Untersuchungen eine feste Grundlage gegeben. Es war ihm gelungen, indem er den Punkt, wo Euler irrte, in volles Licht brachte, eine Frage zu erledigen, die so viele ausgezeichnete Mathematiker seit mehr als siebzig Jahren (seit dem Jahre 1753) beschäftigt hatte. In der That für alle Fälle der Natur, um welche es sich allein handelte, war sie vollkommen erledigt; denn so gross auch unsere Unwissenheit darüber ist, wie sich die Kräfte und Zustände der Materie nach Ort und Zeit im Unendlichkleinen ändern, so können wir doch sicher annehmen, dass die Functionen, auf welche sich die Dirichlet'sche Untersuchung nicht erstreckt, in der Natur nicht vorkommen.

Dessenungeachtet scheinen diese von Dirichlet unerledigten Fälle aus einem zweifachen Grunde Beachtung zu verdienen.

Erstlich steht, wie Dirichlet selbst am Schlusse seiner Abhandlung bemerkt, dieser Gegenstand mit den Principien der Infinitesimalrechnung in der engsten Verbindung und kann dazu dienen, diese Principien zu grösserer Klarheit und Bestimmtheit zu bringen. In dieser Beziehung hat die Behandlung desselben ein unmittelbares Interesse.

Zweitens aber ist die Anwendbarkeit der Fourier'schen Reihen nicht auf physikalische Untersuchungen beschränkt; sie ist jetzt auch in einem Gebiete der reinen Mathematik, der Zahlentheorie, mit Erfolg angewandt, und hier scheinen gerade diejenigen Functionen, deren Darstellbarkeit durch eine trigonometrische Reihe Dirichlet nicht untersucht hat, von Wichtigkeit zu sein.

Am Schlusse seiner Abhandlung verspricht freilich Dirichlet, später auf diese Fälle zurückzukommen, aber dies Versprechen ist bis jetzt unerfüllt geblieben. Auch die Arbeiten von Dirksen und Bessel über die Cosinus- und Sinusreihen leisten diese Ergänzung nicht; sie stehen vielmehr der Dirichlet'schen an Strenge und Allgemeinheit nach. Der mit ihr fast ganz gleichzeitige Aufsatz Dirksen's [1]) welcher offenbar ohne Kenntniss derselben geschrieben ist, schlägt zwar im Allgemeinen einen richtigen Weg ein, enthält aber im Einzelnen einige Ungenauigkeiten.

1) Crelle's Journal. Bd. IV. p. 170.

Denn abgesehen davon, dass er in einem speciellen Falle[1]) für die Summe der Reihe ein falsches Resultat findet, stützt er sich in einer Nebenbetrachtung auf eine nur in besonderen Fällen mögliche Reihenentwicklung[2]), so dass sein Beweis nur für Functionen mit überall endlichen ersten Differentialquotienten vollständig ist. Bessel[3]) sucht den Dirichlet'schen Beweis zu vereinfachen. Aber die Aenderungen in diesem Beweise gewähren keine wesentliche Vereinfachung in den Schlüssen, sondern dienen höchstens dazu, ihn in geläufigere Begriffe zu kleiden, während seine Strenge und Allgemeinheit beträchtlich darunter leidet.

Die Frage über die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe ist also bis jetzt nur unter den beiden Voraussetzungen entschieden, dass die Function durchgehends eine Integration zulässt und nicht unendlich viele Maxima und Minima hat. Wenn die letztere Voraussetzung nicht gemacht wird, so sind die beiden Integraltheoreme Dirichlet's zur Entscheidung der Frage unzulänglich; wenn aber die erstere wegfällt, so ist schon die Fourier'sche Coefficientenbestimmung nicht anwendbar. Der im Folgenden, wo diese Frage ohne besondere Voraussetzungen über die Natur der Function untersucht werden soll, eingeschlagene Weg ist hierdurch, wie man sehen wird, bedingt; ein so directer Weg, wie der Dirichlet's, ist der Natur der Sache nach nicht möglich.

Ueber den Begriff eines bestimmten Integrals und den Umfang seiner Gültigkeit.

4.

Die Unbestimmtheit, welche noch in einigen Fundamentalpunkten der Lehre von den bestimmten Integralen herrscht, nöthigt uns, Einiges

1) l. c. Formel 22.

2) l. c. Art. 3.

3) Schumacher. Astronomische Nachrichten. Nro. 374 (Bd. 16. p. 229).

voraufzuschicken über den Begriff eines bestimmten Integrals und den Umfang seiner Gültigkeit.

Also zuerst: Was hat man unter $\int_a^b f(x)\, dx$ zu verstehen?

Um dieses festzusetzen, nehmen wir zwischen a und b der Grösse nach auf einander folgend, eine Reihe von Werthen $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ an und bezeichnen der Kürze wegen $x_1 - a$ durch δ_1, $x_2 - x_1$ durch $\delta_2, \ldots, b - x_{n-1}$ durch δ_n und durch ε einen positiven ächten Bruch. Es wird alsdann der Werth der Summe

$$S = \delta_1\, f(a + \varepsilon_1 \delta_1) + \delta_2\, f(x_1 + \varepsilon_2 \delta_2) + \delta_3\, f(x_2 + \varepsilon_3 \delta_3) + \ldots + \delta_n\, f(x_{n-1} + \varepsilon_n \delta_n)$$

von der Wahl der Intervalle δ und der Grössen ε abhängen. Hat sie nun die Eigenschaft, wie auch δ und ε gewählt werden mögen, sich einer festen Grenze A unendlich zu nähern, sobald sämmtliche δ unendlich klein werden, so heisst dieser Werth $\int_a^b f(x)\, dx$.

Hat sie diese Eigenschaft nicht, so hat $\int_a^b f(x)\, dx$ keine Bedeutung. Man hat jedoch in mehreren Fällen versucht, diesem Zeichen auch dann eine Bedeutung beizulegen, und unter diesen Erweiterungen des Begriffs eines bestimmten Integrals ist eine von allen Mathematikern angenommen. Wenn nämlich die Function $f(x)$ bei Annäherung des Arguments an einen einzelnen Werth c in dem Intervalle (a, b) unendlich gross wird, so kann offenbar die Summe S, welchen Grad von Kleinheit man auch den δ vorschreiben möge, jeden beliebigen Werth erhalten; sie hat also keinen Grenzwerth, und $\int_a^b f(x)\, dx$ würde nach dem Obigen keine Bedeutung haben. Wenn aber alsdann $\int_a^{c-\alpha_1} f(x)\, dx + \int_{c+\alpha_2}^b f(x)\, dx$ sich, wenn α_1 und α_2 unendlich klein werden, einer festen Grenze nähert, so versteht man unter $\int_a^b f(x)\, dx$ diesen Grenzwerth.

Andere Festsetzungen von Cauchy über den Begriff des bestimmten Integrales in den Fällen, wo es dem Grundbegriffe nach ein solches nicht giebt, mögen für einzelne Klassen von Untersuchungen zweckmässig sein; sie sind indess nicht allgemein eingeführt und dazu, schon wegen ihrer grossen Willkührlichkeit, wohl kaum geeignet.

5.

Untersuchen wir jetzt zweitens den Umfang der Gültigkeit dieses Begriffs oder die Frage: in welchen Fällen lässt eine Function eine Integration zu und in welchen nicht?

Wir betrachten zunächst den Integralbegriff im engern Sinne, d. h. wir setzen voraus, dass die Summe S, wenn sämmtliche δ unendlich klein werden, convergirt. Bezeichnen wir also die grösste Schwankung der Function zwischen a und x_1, d. h. den Unterschied ihres grössten und kleinsten Werthes in diesem Intervalle, durch D_1, zwischen x_1 und x_2 durch $D_2 \ldots.$, zwischen x_{n-1} und b durch D_n, so muss

$$\delta_1 D_1 + \delta_2 D_2 + \ldots + \delta_n D_n$$

mit den Grössen δ unendlich klein werden. Wir nehmen ferner an, dass, so lange sämmtliche δ kleiner als d bleiben, der grösste Werth, den diese Summe erhalten kann, Δ sei; Δ wird alsdann eine Function von d sein, welche mit d immer abnimmt und mit dieser Grösse unendlich klein wird. Ist nun die Gesammtgrösse der Intervalle, in welchen die Schwankungen grösser als σ sind, $= s$, so wird der Beitrag dieser Intervalle zur Summe $\delta_1 D_1 + \delta_2 D_2 + \ldots + \delta_n D_n$ offenbar $\geqq \sigma s$. Man hat daher

$$\sigma s \overline{\overline{<}} \delta_1 D_1 + \delta_2 D_2 + \ldots + \delta_n D_n \overline{\overline{<}} \Delta, \text{ folglich } s \overline{\overline{<}} \frac{\Delta}{\sigma}.$$

$\frac{\Delta}{\sigma}$ kann nun, wenn σ gegeben ist, immer durch geeignete Wahl von d beliebig klein gemacht werden; dasselbe gilt daher von s, und es ergiebt sich also:

Damit die Summe S, wenn sämmtliche δ unendlich klein werden,

convergirt, ist ausser der Endlichkeit der Function $f(x)$ noch erforderlich, dass die Gesammtgrösse der Intervalle, in welchen die Schwankungen $> \sigma$ sind, was auch σ sei, durch geeignete Wahl von d beliebig klein gemacht werden kann.

Dieser Satz lässt sich auch umkehren:

Wenn die Function $f(x)$ immer endlich ist, und bei unendlichem Abnehmen sämmtlicher Grössen δ die Gesammtgrösse s der Intervalle, in welchen die Schwankungen der Function $f(x)$ grösser, als eine gegebene Grösse σ, sind, stets zuletzt unendlich klein wird, so convergirt die Summe S, wenn sämmtliche δ unendlich klein werden.

Denn diejenigen Intervalle, in welchen die Schwankungen $> \sigma$ sind, liefern zur Summe $\delta_1 D_1 + \delta_2 D_2 + \ldots + \delta_n D_n$ einen Beitrag, kleiner, als s, multiplicirt in die grösste Schwankung der Function zwischen a und b, welche (n. V.) endlich ist; die übrigen Intervalle einen Beitrag $< \sigma(b - a)$. Offenbar kann man nun erst σ beliebig klein annehmen und dann immer noch die Grösse der Intervalle (n. V.) so bebestimmen, dass auch s beliebig klein wird, wodurch der Summe $\delta_1 D_1 + \ldots + \delta_n D_n$ jede beliebige Kleinheit gegeben, und folglich der Werth der Summe S in beliebig enge Grenzen eingeschlossen werden kann.

Wir haben also Bedingungen gefunden, welche nothwendig und hinreichend sind, damit die Summe S bei unendlichem Abnehmen der Grössen δ convergire und also im engern Sinne von einem Integrale der Function $f(x)$ zwischen a und b die Rede sein könne.

Wird nun der Integralbegriff wie oben erweitert, so ist offenbar, damit die Integration durchgehends möglich sei, die letzte der beiden gefundenen Bedingungen auch dann noch nothwendig; an die Stelle der Bedingung, dass die Function immer endlich sei, aber tritt die Bedingung, dass die Function nur bei Annäherung des Arguments an einzelne Werthe unendlich werde, und dass sich ein bestimmter Grenzwerth ergebe, wenn die Grenzen der Integration diesen Werthen unendlich genähert werden.

6.

Nachdem wir die Bedingungen für die Möglichkeit eines bestimmten Integrals im Allgemeinen, d. h. ohne besondere Voraussetzungen über die Natur der zu integrirenden Function, untersucht haben, soll nun diese Untersuchung in besonderen Fällen theils angewandt, theils weiter ausgeführt werden, und zwar zunächst für die Functionen, welche zwischen je zwei noch so engen Grenzen unendlich oft unstetig sind.

Da diese Functionen noch nirgends betrachtet sind, wird es gut sein, von einem bestimmten Beispiele auszugehen. Man bezeichne der Kürze wegen durch (x) den Ueberschuss von x über die nächste ganze Zahl, oder, wenn x zwischen zweien in der Mitte liegt und diese Bestimmung zweideutig wird, den Mittelwerth aus den beiden Werthen $\frac{1}{2}$ und $-\frac{1}{2}$, also die Null, ferner durch n eine ganze, durch p eine ungerade Zahl und bilde alsdann die Reihe

$$f(x) = \frac{(x)}{1} + \frac{(2x)}{4} + \frac{(3x)}{9} + \ldots = \sum_{1,\infty} \frac{(nx)}{nn};$$

so convergirt, wie leicht zu sehen, diese Reihe für jeden Werth von x; ihr Werth nähert sich, sowohl, wenn der Argumentwerth stetig abnehmend, als wenn er stetig zunehmend gleich x wird, stets einem festen Grenzwerth, und zwar ist, wenn $x = \frac{p}{2n}$ (wo p, n relative Primzahlen)

$$f(x+0) = f(x) - \frac{1}{2nn}\left(1 + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{25} + \ldots\right) = f(x) - \frac{\pi\pi}{16nn}$$

$$f(x-0) = f(x) + \frac{1}{2nn}\left(1 + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{25} + \ldots\right) = f(x) + \frac{\pi\pi}{16nn}$$

sonst aber überall $f(x+0) = f(x)$, $f(x-0) = f(x)$.

Diese Function ist also für jeden rationalen Werth von x, der in den kleinsten Zahlen ausgedrückt ein Bruch mit geradem Nenner ist, unstetig, also zwischen je zwei noch so engen Grenzen unendlich oft, so jedoch, dass die Zahl der Sprünge, welche grösser als eine gegebene Grösse sind, immer endlich ist. Sie lässt durchgehends eine Integration

zu. In der That genügen hiezu neben ihrer Endlichkeit die beiden Eigenschaften, dass sie für jeden Werth von x beiderseits einen Grenzwerth $f(x+0)$ und $f(x-0)$ hat, und dass die Zahl der Sprünge, welche grösser oder gleich einer gegebenen Grösse σ sind, stets endlich ist. Denn wenden wir unsere obige Untersuchung an, so lässt sich offenbar in Folge dieser beiden Umstände d stets so klein annehmen, dass in sämmtlichen Intervallen, welche diese Sprünge nicht enthalten, die Schwankungen kleiner als σ sind, und dass die Gesammtgrösse der Intervalle, welche diese Sprünge enthalten, beliebig klein wird.

Es verdient bemerkt zu werden, dass die Functionen, welche nicht unendlich viele Maxima und Minima haben (zu welchen übrigens die eben betrachtete nicht gehört), wo sie nicht unendlich werden, stets diese beiden Eigenschaften besitzen und daher allenthalben, wo sie nicht unendlich werden, eine Integration zulassen, wie sich auch leicht direct zeigen lässt.

Um jetzt den Fall, wo die zu integrirende Function $f(x)$ für einen einzelnen Werth unendlich gross wird, näher in Betracht zu ziehen, nehmen wir an, dass dies für $x=0$ stattfinde, so dass bei abnehmendem positiven x ihr Werth zuletzt über jede gegebene Grenze wächst.

Es lässt sich dann leicht zeigen, dass $xf(x)$ bei abnehmendem x von einer endlichen Grenze a an, nicht fortwährend grösser als eine endliche Grösse c bleiben könne. Denn dann wäre $\int_x^a f(x)\,dx > c\int_x^a \frac{dx}{x}$, also grösser als $c\left(\log\frac{1}{x}-\log\frac{1}{a}\right)$, welche Grösse mit abnehmendem x zuletzt in's Unendliche wächst. Es muss also $xf(x)$, wenn diese Function nicht in der Nähe von $x=0$ unendlich viele Maxima und Minima hat, nothwendig mit x unendlich klein werden, damit $f(x)$ einer Integration fähig sein könne. Wenn andererseits $f(x)\,x^\alpha = \frac{f(x)\,dx\,(1-\alpha)}{d\,(x^{1-\alpha})}$ bei einem Werth von $\alpha<1$ mit x unendlich klein wird, so ist klar, dass das Integral bei unendlichem Abnehmen der unteren Grenze convergirt.

Ebenso findet man, dass im Falle der Convergenz des Integrals die Functionen

$$f(x)\,x\log\frac{1}{x} = \frac{f(x)\,dx}{-\,d\log\log\frac{1}{x}},\quad f(x)\,x\log\frac{1}{x}\log\log\frac{1}{x} = \frac{f(x)\,dx}{-\,d\log\log\log\frac{1}{x}},\ \ldots$$

$$f(x)x\,\log\frac{1}{x}\,\log\log\frac{1}{x}\,\ldots\,\overset{n-1}{\log}\frac{1}{x}\,\overset{n}{\log}\frac{1}{x} = \frac{f(x)\,dx}{-\,d\,\overset{n+1}{\log}\frac{1}{x}}$$

nicht bei abnehmendem x von einer endlichen Grenze an fortwährend grösser als eine endliche Grösse bleiben können, und also, wenn sie nicht unendlich viele Maxima und Minima haben, mit x unendlich klein werden müssen; dass dagegen das Integral $\int f(x)\,dx$ bei unendlichem Abnehmen der unteren Grenze convergire, sobald

$$f(x)\;x\;.\;\log\frac{1}{x}\ldots\overset{n-1}{\log}\frac{1}{x}\left(\overset{n}{\log}\frac{1}{x}\right)^{\alpha} = \frac{f(x)\;dx\;(1-\alpha)}{-\,d\left(\overset{n}{\log}\frac{1}{x}\right)^{1-\alpha}}$$

für $\alpha > 1$ mit x unendlich klein wird.

Hat aber die Function $f(x)$ unendlich viele Maxima und Minima, so lässt sich über die Ordnung ihres Unendlichwerdens nichts bestimmen. In der That, nehmen wir an, die Function sei ihrem absoluten Werthe nach, wovon die Ordnung des Unendlichwerdens allein abhängt, gegeben, so wird man immer durch geeignete Bestimmung des Zeichens bewirken können, dass das Integral $\int f(x)\,dx$ bei unendlichem Abnehmen der unteren Grenze convergire. Als Beispiel einer solchen Function, welche unendlich wird und zwar so, dass ihre Ordnung (die Ordnung von $\frac{1}{x}$ als Einheit genommen) unendlich gross ist, mag die Function

$$\frac{d\left(x\cos\left(e^{\frac{1}{x}}\right)\right)}{dx} = \cos e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x}\,e^{\frac{1}{x}}\,\sin e^{\frac{1}{x}}$$

dienen.

Das möge über diesen im Grunde in ein anderes Gebiet gehörigen

O*

Gegenstand genügen; wir gehen jetzt an unsere eigentliche Aufgabe, eine allgemeine Untersuchung über die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe.

Untersuchung der Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe ohne besondere Voraussetzungen über die Natur der Function.

7.

Die bisherigen Arbeiten über diesen Gegenstand hatten den Zweck, die Fourier'sche Reihe für die in der Natur vorkommenden Fälle zu beweisen; es konnte daher der Beweis für eine ganz willkührlich angenommene Function begonnen, und später der Gang der Function behuf des Beweises willkührlichen Beschränkungen unterworfen werden, wenn sie nur jenen Zweck nicht beeinträchtigten. Für unsern Zweck darf derselbe nur den zur Darstellbarkeit der Function nothwendigen Bedingungen unterworfen werden; es müssen daher zunächst zur Darstellbarkeit nothwendige Bedingungen aufgesucht und aus diesen dann zur Darstellbarkeit hinreichende ausgewählt werden. Während also die bisherigen Arbeiten zeigten: wenn eine Function diese und jene Eigenschaften hat, so ist sie durch die Fourier'sche Reihe darstellbar; müssen wir von der umgekehrten Frage ausgehen: Wenn eine Function durch eine trigonometrische Reihe darstellbar ist, was folgt daraus über ihren Gang, über die Aenderung ihres Werthes bei stetiger Aenderung des Arguments?

Demnach betrachten wir die Reihe

$$a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \dots$$
$$\tfrac{1}{2} b_0 + b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + \dots$$

oder, wenn wir der Kürze wegen

$\tfrac{1}{2} b_0 = A_0$, $a_1 \sin x + b_1 \cos x = A_1$, $a_2 \sin 2x + b_2 \cos 2x = A_2, \dots$

setzen, die Reihe

$$A_0 + A_1 + A_2 + \dots$$

als gegeben. Wir bezeichnen diesen Ausdruck durch Ω und seinen Werth durch $f(x)$, so dass diese Function nur für diejenigen Werthe von x vorhanden ist, wo die Reihe convergirt.

Zur Convergenz einer Reihe ist nothwendig, dass ihre Glieder zuletzt unendlich klein werden. Wenn die Coefficienten a_n, b_n mit wachsendem n in's Unendliche abnehmen, so werden die Glieder der Reihe Ω für jeden Werth von x zuletzt unendlich klein; andernfalls kann dies nur für besondere Werthe von x stattfinden. Es ist nöthig, beide Fälle getrennt zu behandeln.

8.

Wir setzen also zunächst voraus, dass die Glieder der Reihe Ω für jeden Werth von x zuletzt unendlich klein werden.

Unter dieser Voraussetzung convergirt die Reihe

$$C + C'x + A_0 \frac{xx}{2} - A_1 - \frac{A_2}{4} - \frac{A_3}{9} \ldots = F(x),$$

welche man aus Ω durch zweimalige Integration jedes Gliedes nach x erhält, für jeden Werth von x. Ihr Werth $F(x)$ ändert sich mit x stetig, und diese Function F von x lässt folglich allenthalben eine Integration zu.

Um Beides — die Convergenz der Reihe und die Stetigkeit der Function $F(x)$ — einzusehen, bezeichne man die Summe der Glieder bis $-\frac{A_n}{nn}$ einschliesslich durch N, den Rest der Reihe, d. h. die Reihe

$$-\frac{A_{n+1}}{(n+1)^2} - \frac{A_{n+2}}{(n+2)^2} - \ldots$$

durch R und den grössten Werth von A_m für $m > n$ durch ε. Alsdann bleibt der Werth von R, wie weit man diese Reihe fortsetzen möge, offenbar abgesehen vom Zeichen

$$< \varepsilon \left(\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots\right) < \frac{\varepsilon}{n}$$

und kann also in beliebig enge Grenzen eingeschlossen werden, wenn

man n nur hinreichend gross annimmt; folglich convergirt die Reihe. Ferner ist die Function $F(x)$ stetig; d. h. ihrer Aenderung kann jede Kleinheit gegeben werden, wenn man der entsprechenden Aenderung von x eine hinreichende Kleinheit vorschreibt. Denn die Aenderung von $F(x)$ setzt sich zusammen aus der Aenderung von R und von N; offenbar kann man nun erst n so gross annehmen, dass R, was auch x sei, und folglich auch die Aenderung von R für jede Aenderung von x beliebig klein wird, und dann die Aenderung von x so klein annehmen, dass auch die Aenderung von N beliebig klein wird.

Es wird gut sein, einige Sätze über diese Function $F(x)$, deren Beweise den Faden der Untersuchung unterbrechen würden, voraufzuschicken.

Lehrsatz 1. Falls die Reihe Ω convergirt, convergirt

$$\frac{F(x+\alpha+\beta)-F(x+\alpha-\beta)-F(x-\alpha+\beta)+F(x-\alpha-\beta)}{4\alpha\beta},$$

wenn α und β so unendlich klein werden, dass ihr Verhältniss endlich bleibt, gegen denselben Werth, wie die Reihe.

In der That wird

$$\frac{F(x+\alpha+\beta)-F(x+\alpha-\beta)-F(x-\alpha+\beta)+F(x-\alpha-\beta)}{4\alpha\beta}$$

$$=A_0+A_1\frac{\sin\alpha}{\alpha}\frac{\sin\beta}{\beta}+A_2\frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}\frac{\sin 2\beta}{2\beta}+A_3\frac{\sin 3\alpha}{3\alpha}\frac{\sin 3\beta}{3\beta}+\dots$$

oder, um den einfacheren Fall, wo $\beta=\alpha$, zuerst zu erledigen,

$$\frac{F(x+2\alpha)-2F(x)+F(x-2\alpha)}{4\alpha\alpha}=A_0+A_1\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2+A_2\left(\frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}\right)^2+\dots$$

Ist die unendliche Reihe $A_0+A_1+A_2+\dots=f(x)$, die Reihe $A_0+A_1+\dots+A_{n-1}=f(x)+\varepsilon_n$, so muss sich für eine beliebig gegebene Grösse δ ein Werth m von n angeben lassen, so dass, wenn $n>m$, $\varepsilon_n<\delta$ wird. Nehmen wir nun α so klein an, dass $m\alpha<\pi$, setzen wir ferner mittelst der Substitution $A_n=\varepsilon_{n+1}-\varepsilon_n$,

$\sum\limits_{0,\infty}\left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha}\right)^2 A_n$ in die Form $f(x) + \sum\limits_{1,\infty} \varepsilon_n \left\{\left(\frac{\sin(n-1)\alpha}{(n-1)\alpha}\right)^2 - \left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha}\right)^2\right\}$
und theilen wir diese letztere unendliche Reihe in drei Theile, indem wir

1) die Glieder vom Index 1 bis m einschliesslich,

2) vom Index $m+1$ bis zur grössten unter $\frac{\pi}{\alpha}$ liegenden ganzen Zahl, welche s sei,

3) von $s+1$ bis unendlich,

zusammenfassen, so besteht der erste Theil aus einer endlichen Anzahl stetig sich ändernder Glieder und kann daher seinem Grenzwerth 0 beliebig genähert werden, wenn man α hinreichend klein werden lässt; der zweite Theil ist, da der Factor von ε_n beständig positiv ist, offenbar abgesehen vom Zeichen

$$< \delta\left\{\left(\frac{\sin m\alpha}{m\alpha}\right)^2 - \left(\frac{\sin s\alpha}{s\alpha}\right)^2\right\};$$

um endlich den dritten Theil in Grenzen einzuschliessen, zerlege man das allgemeine Glied in

$$\varepsilon_n\left\{\left(\frac{\sin(n-1)\alpha}{(n-1)\alpha}\right)^2 - \left(\frac{\sin(n-1)\alpha}{n\alpha}\right)^2\right\}$$

$$\text{und } \varepsilon_n\left\{\left(\frac{\sin(n-1)\alpha}{n\alpha}\right)^2 - \left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha}\right)^2\right\} = -\varepsilon_n\,\frac{\sin(2n-1)\alpha\,\sin\alpha}{(n\alpha)^2};$$

so leuchtet ein, dass es

$$< \delta\left\{\frac{1}{(n-1)^2\,\alpha\alpha} - \frac{1}{nn\alpha\alpha}\right\} + \delta\,\frac{1}{nn\alpha}$$

und folglich die Summe von $n = s+1$ bis $n = \infty$

$$< \delta\left\{\frac{1}{(s\alpha)^2} + \frac{1}{s\alpha}\right\},$$

welcher Werth für ein unendlich kleines α in

$$\delta\left\{\frac{1}{\pi\pi} + \frac{1}{\pi}\right\}$$

übergeht.

Die Reihe

$$\Sigma\, \varepsilon_n \left\{\left(\frac{\sin (n-1)\, \alpha}{(n-1)\, \alpha}\right)^2 - \left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha}\right)^2\right\}$$

nähert sich daher mit abnehmendem α einem Grenzwerth, der nicht grösser als

$$\delta \left\{1 + \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi\pi}\right\}$$

sein kann, also Null sein muss, und folglich convergirt

$$\frac{F(x+2\alpha)-2F(x)+F(x-2\alpha)}{4\alpha\alpha}, \text{ welches } = f(x) + \Sigma\varepsilon_n \left\{\left(\frac{\sin (n-1)\alpha}{(n-1)\,\alpha}\right)^2 - \left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha}\right)^2\right\}$$

mit in's Unendliche abnehmendem α gegen $f(x)$, wodurch unser Satz für den Fall $\beta = \alpha$ bewiesen ist.

Um ihn allgemein zu beweisen, sei

$$F(x+\alpha+\beta) - 2F(x) + F(x-\alpha-\beta) = (\alpha+\beta)^2\,(f(x)+\delta_1)$$
$$F(x+\alpha-\beta) - 2F(x) + F(x-\alpha+\beta) = (\alpha-\beta)^2\,(f(x)+\delta_2),$$

woraus

$$F(x+\alpha+\beta) - F(x+\alpha-\beta) - F(x-\alpha+\beta) + F(x-\alpha-\beta)$$
$$= 4\alpha\beta\, f(x) + (\alpha+\beta)^2\,\delta_1 - (\alpha-\beta)^2\,\delta_2.$$

In Folge des eben Bewiesenen werden nun δ_1 und δ_2 unendlich klein, sobald α und β unendlich klein werden; es wird also auch

$$\frac{(\alpha+\beta)^2}{4\alpha\beta}\,\delta_1 - \frac{(\alpha-\beta)^2}{4\alpha\beta}\,\delta_2$$

unendlich klein, wenn dabei die Coefficienten von δ_1 und δ_2 nicht unendlich gross werden, was nicht stattfindet, wenn zugleich $\frac{\beta}{\alpha}$ endlich bleibt; und folglich convergirt alsdann

$$\frac{F(x+\alpha+\beta) - F(x+\alpha-\beta) - F(x-\alpha+\beta) + F(x-\alpha-\beta)}{4\alpha\beta} \text{ gegen } f(x), \text{ w. z. b. w.}$$

Lehrsatz 2.

$$\frac{F(x+2\alpha)+F(x-2\alpha)-2F(x)}{2\alpha}$$

wird stets mit α unendlich klein.

Um dieses zu beweisen, theile man die Reihe

$$\Sigma\, A_n \left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha}\right)^2$$

in drei Gruppen, von welchen die erste alle Glieder bis zu einem festen Index m enthält, von dem an A_n immer kleiner als ε bleibt, die zweite alle folgenden Glieder, für welche $n\alpha \overline{\gtrless}$ als eine feste Grösse c ist, die dritte den Rest der Reihe umfasst. Es ist dann leicht zu sehen, dass, wenn α in's Unendliche abnimmt, die Summe der ersten endlichen Gruppe endlich bleibt, d. h. $<$ eine feste Grösse Q; die der zweiten $< \varepsilon\,\frac{c}{\alpha}$, die der dritten

$$< \varepsilon \sum_{c<n\alpha} \frac{1}{nn\alpha\alpha} < \frac{\varepsilon}{\alpha c}.$$

Folglich bleibt

$$\frac{F(x+2\alpha)+F(x-2\alpha)-2F(x)}{2\alpha},\ \text{welches} = 2\alpha\ \Sigma\, A_n \left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha}\right)^2,$$

$$< 2\left(Q\alpha + \varepsilon\left(c+\frac{1}{c}\right)\right),$$

woraus der z. b. Satz folgt.

Lehrsatz 3. Bezeichnet man durch b und c zwei beliebige Constanten, die grössere durch c, und durch $\lambda(x)$ eine Function, welche nebst ihrem ersten Differentialquotienten zwischen b und c immer stetig ist und an den Grenzen gleich Null wird, und von welcher der zweite Differentialquotient nicht unendlich viele Maxima und Minima hat, so wird das Integral

$$\mu\mu \int_b^c F(x) \cos \mu(x-a)\, \lambda(x)\, dx,$$

wenn μ in's Unendliche wächst, zuletzt kleiner als jede gegebene Grösse.

Setzt man für $F(x)$ seinen Ausdruck durch die Reihe, so erhält man für

$$\mu\mu\int_b^c F(x)\cos\mu\,(x-a)\,\lambda\,(x)\,dx$$

die Reihe (Φ)

$$\mu\mu\int_b^c\left(C+C'x+A_0\frac{xx}{2}\right)\cos\,\mu\,(x-a)\,\lambda\,(x)\,dx$$

$$-\sum_{1,\infty}\frac{\mu\mu}{nn}\int_b^c A_n\cos\,\mu\,(x-a)\,\lambda\,(x)\,dx$$

Nun lässt sich $A_n\cos\,\mu\,(x-a)$ offenbar als ein Aggregat von $\cos\,(\mu+n)\,(x-a)$, $\sin\,(\mu+n)\,(x-a)$, $\cos\,(\mu-n)\,(x-a)$, $\sin\,(\mu-n)\,(x-a)$ ausdrücken, und bezeichnet man in demselben die Summe der beiden ersten Glieder durch $B_{\mu+n}$, die Summe der beiden letzten Glieder durch $B_{\mu-n}$, so hat man $\cos\,\mu\,(x-a)\,A_n=B_{\mu+n}+B_{\mu-n}$,

$$\frac{d^2B_{\mu+n}}{dx^2}=-(\mu+n)^2\,B_{\mu+n},\ \frac{d^2B_{\mu-n}}{dx^2}=-(\mu-n)^2\,B_{\mu-n}$$

und es werden $B_{\mu+n}$ und $B_{\mu-n}$ mit wachsendem n, was auch x sei, zuletzt unendlich klein.

Das allgemeine Glied der Reihe Φ

$$-\frac{\mu\mu}{nn}\int_b^c A_n\cos\,\mu\,(x-a)\,\lambda\,(x)\,dx$$

wird daher

$$=\frac{\mu^2}{n^2\,(\mu+n)^2}\int_b^c\frac{d^2B_{\mu+n}}{dx^2}\,\lambda\,(x)\,dx+\frac{\mu^2}{n^2\,(\mu-n)^2}\int_b^c\frac{d^2B_{\mu-n}}{dx^2}\,\lambda\,(x)\,dx$$

oder durch zweimalige partielle Integration, indem man zuerst $\lambda\,(x)$, dann $\lambda'\,(x)$ als constant betrachtet,

$$=\frac{\mu^2}{n^2\,(\mu+n)^2}\int_b^c B_{\mu+n}\,\lambda''\,(x)\,dx+\frac{\mu^2}{n^2\,(\mu-n)^2}\int_b^c B_{\mu-n}\,\lambda''\,(x)\,dx,$$

da $\lambda(x)$ und $\lambda'(x)$ und daher auch die aus dem Integralzeichen tretenden Glieder an den Grenzen $= 0$ werden.

Man überzeugt sich nun leicht, dass $\int_b^c B_{\mu \pm n}\, \lambda''(x)\, dx$, wenn μ in's Unendliche wächst, was auch n sei, unendlich klein wird; denn dieser Ausdruck ist gleich einem Aggregat der Integrale

$$\int_b^c \cos(\mu \pm n)(x - a)\, \lambda''(x)\, dx, \int_b^c \sin(\mu \pm n)(x - a)\, \lambda''(x)\, dx$$

und wenn $\mu \pm n$ unendlich gross wird, so werden diese Integrale, wenn aber nicht, weil dann n unendlich gross wird, ihre Coefficienten in diesem Ausdrucke unendlich klein.

Zum Beweise unseres Satzes genügt es daher offenbar, wenn von der Summe

$$\Sigma \frac{\mu^2}{(\mu - n)^2\, n^2}$$

über alle ganzen Werthe von n ausgedehnt, welche den Bedingungen $n < -c'$, $c'' < n < \mu - c'''$, $\mu + c^{IV} < n$ genügen, für irgend welche positive Werthe der Grössen c gezeigt wird, dass sie, wenn μ unendlich gross wird, endlich bleibt. Denn abgesehen von den Gliedern, für welche $-c' < n < c''$, $\mu - c''' < n < \mu + c^{IV}$, welche offenbar unendlich klein werden und von endlicher Anzahl sind, bleibt die Reihe Φ offenbar kleiner als diese Summe, multiplicirt mit dem grössten Werthe von $\int_b^c B_{\mu \pm n}\, \lambda''(x)\, dx$, welcher unendlich klein wird.

Nun ist aber, wenn die Grössen $c > 1$ sind, die Summe

$$\Sigma \frac{\mu^2}{(\mu - n)^2\, n^2} = \frac{1}{\mu}\, \Sigma \frac{\frac{1}{\mu}}{\left(1 - \frac{n}{\mu}\right)^2 \left(\frac{n}{\mu}\right)^2}$$

in den obigen Grenzen, kleiner als

$$\frac{1}{\mu} \int \frac{dx}{(1 - x)^2\, x^2}$$

ausgedehnt von

$$-\infty \text{ bis } -\frac{c'-1}{\mu},\ \frac{c'-1}{\mu} \text{ bis } 1-\frac{c'''-1}{\mu},\ 1+\frac{c^{IV}-1}{\mu} \text{ bis } \infty;$$

denn zerlegt man das ganze Intervall von $-\infty$ bis $+\infty$ von Null anfangend in Intervalle von der Grösse $\frac{1}{\mu}$, und ersetzt man überall die Function unter dem Integralzeichen durch den kleinsten Werth in jedem Intervall, so erhält man, da diese Function zwischen den Integrationsgrenzen nirgends ein Maximum hat, sämmtliche Glieder der Reihe.

Führt man die Integration aus, so erhält man

$$\frac{1}{\mu}\int\frac{dx}{x^2\,(1-x)^2} = \frac{1}{\mu}\left(-\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}+2\log x-2\log(1-x)\right)+\text{const.}$$

und folglich zwischen den obigen Grenzen einen Werth, der mit μ nicht unendlich gross wird.

9.

Mit Hülfe dieser Sätze lässt sich über die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe, deren Glieder für jeden Argumentwerth zuletzt unendlich klein werden, Folgendes feststellen:

I. Wenn eine nach dem Intervall 2π periodisch sich wiederholende Function $f(x)$ durch eine trigonometrische Reihe, deren Glieder für jeden Werth von x zuletzt unendlich klein werden, darstellbar sein soll, so muss es eine stetige Function $F(x)$ geben, von welcher $f(x)$ so abhängt, dass

$$\frac{F(x+\alpha+\beta)-F(x+\alpha-\beta)-F(x-\alpha+\beta)+F(x-\alpha-\beta)}{4\alpha\beta},$$

wenn α und β unendlich klein werden und dabei ihr Verhältniss endlich bleibt, gegen $f(x)$ convergirt.

Es muss ferner $\mu\mu\int_b^c F(x)\cos\mu(x-a)\,\lambda(x)\,dx$, wenn $\lambda(x)$ und $\lambda'(x)$ an den Grenzen des Integrals $=0$ und zwischen denselben immer

stetig sind, und $\lambda''(x)$ nicht unendlich viele Maxima und Minima hat, mit wachsendem μ zuletzt unendlich klein werden.

II. Wenn umgekehrt diese beiden Bedingungen erfüllt sind, so giebt es eine trigonometrische Reihe, in welcher die Coefficienten zuletzt unendlich klein werden, und welche überall, wo sie convergirt, die Function darstellt.

Denn bestimmt man die Grössen C', A_0 so, dass $F(x) - C'x - A_0 \frac{xx}{2}$ eine nach dem Intervall 2π periodisch wiederkehrende Function ist, und entwickelt diese nach Fourier's Methode in die trigonometrische Reihe

$$C - \frac{A_1}{1} - \frac{A_2}{4} - \frac{A_3}{9} - \ldots,$$

indem man

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(F(t) - C't - A_0\frac{tt}{2}\right)dt = C$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(F(t) - C't - A_0\frac{tt}{2}\right)\cos n(x-t)\,dt = -\frac{A_n}{nn}$$

setzt, so muss (n. V.)

$$A_n = -\frac{nn}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(F(t) - C't - A_0\frac{tt}{2}\right)\cos n(x-t)\,dt$$

mit wachsendem n zuletzt unendlich klein werden; woraus nach Satz 1 des vorigen Art. folgt, dass die Reihe

$$A_0 + A_1 + A_2 + \ldots$$

überall, wo sie convergirt, gegen $f(x)$ convergirt.

III. Es sei $b < x < c$, und $\varrho(t)$ eine solche Function, dass $\varrho(t)$ und $\varrho'(t)$ für $t = b$ und $t = c$ den Werth 0 haben und zwischen diesen Werthen stetig sich ändern, $\varrho''(t)$ nicht unendlich viele Maxima und Minima hat, und dass ferner für $t = x$ $\varrho(t) = 1$, $\varrho'(t) = 0$, $\varrho''(t) = 0$, $\varrho'''(t)$ und $\varrho^{IV}(t)$ aber endlich und stetig sind; so wird der Unterschied zwischen der Reihe $A_0 + A_1 + \ldots + A_n$ und dem Integral

$$\frac{1}{2\pi}\int_b^c F(t)\,\frac{dd\,\dfrac{\sin\frac{2n+1}{2}(x-t)}{\sin\frac{(x-t)}{2}}}{dt^2}\,\varrho(t)\,dt$$

mit wachsendem n zuletzt unendlich klein. Die Reihe $A_0 + A_1 + A_2 + \ldots$ wird daher convergiren oder nicht convergiren je nachdem

$$\frac{1}{2\pi}\int_b^c F(t)\,\frac{dd\,\dfrac{\sin\frac{2n+1}{2}(x-t)}{\sin\frac{x-t}{2}}}{dt^2}\,\varrho(t)\,dt$$

sich mit wachsendem n zuletzt einer festen Grenze nähert oder dies nicht stattfindet.

In der That wird

$$A_1 + A_2 + \ldots A_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(F(t) - Ct - A_0\frac{tt}{2}\right)\sum_{1,n} -nn\cos n(x-t)\,dt,$$

oder, da

$$2\sum_{1,n} -nn\cos n(x-t) = 2\sum_{1,n}\frac{d^2\cos n(x-t)}{dt^2} = \frac{dd\,\dfrac{\sin\frac{2n+1}{2}(x-t)}{\sin\frac{x-t}{2}}}{dt^2}$$

ist,

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(F(t) - Ct - A_0\frac{tt}{2}\right)\frac{dd\,\dfrac{\sin\frac{2n+1}{2}(x-t)}{\sin\frac{x-t}{2}}}{dt^2}\,dt.$$

Nun wird aber nach Satz 3 des vorigen Art.

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(F(t) - C't - A_0\frac{tt}{2}\right)\frac{dd\,\dfrac{\sin\frac{2n+1}{2}(x-t)}{\sin\frac{x-t}{2}}}{dt^2}\,\lambda(t)\,dt$$

bei unendlichem Zunehmen von n unendlich klein, wenn $\lambda(t)$ nebst ihrem ersten Differentialquotienten stetig ist, $\lambda''(t)$ nicht unendlich viele Maxima und Minima hat, und für $t = x$ $\lambda(t) = o$, $\lambda'(t) = o$, $\lambda''(t) = o$, $\lambda'''(t)$ und $\lambda''''(t)$ aber endlich und stetig sind.

Setzt man hierin $\lambda(t)$ ausserhalb der Grenzen b, c gleich 1 und zwischen diesen Grenzen $= 1 - \varrho(t)$, was offenbar verstattet ist, so folgt dass die Differenz zwischen der Reihe $A_1 + \ldots + A_n$ und dem Integral

$$\frac{1}{2\pi}\int_{b}^{c}\left(F(t) - C't - A_0\frac{tt}{2}\right)\frac{dd\,\dfrac{\sin\frac{2n+1}{2}(x-t)}{\sin\frac{x-t}{2}}}{dt^2}\,\varrho(t)\,dt$$

mit wachsendem n zuletzt unendlich klein wird. Man überzeugt sich aber leicht durch partielle Integration, dass

$$\frac{1}{2\pi}\int_{b}^{c}\left(C't + A_0\frac{tt}{2}\right)\frac{dd\,\dfrac{\sin\frac{2n+1}{2}(x-t)}{\sin\frac{x-t}{2}}}{dt^2}\,\varrho(t)\,dt$$

wenn n unendlich gross wird, gegen A_0 convergirt, wodurch man obigen Satz erhält.

10.

Aus dieser Untersuchung hat sich also ergeben, dass, wenn die Coefficienten der Reihe Ω zuletzt unendlich klein werden, dann die Convergenz der Reihe für einen bestimmten Werth von x nur abhängt von dem Verhalten der Function $f(x)$ in unmittelbarer Nähe dieses Werthes.

Ob nun die Coefficienten der Reihe zuletzt unendlich klein werden, wird in vielen Fällen nicht aus ihrem Ausdrucke durch bestimmte Integrale, sondern auf andern Wege entschieden werden müssen. Es ver-

dient indess **ein** Fall hervorgehoben zu werden, wo sich dies unmittelbar aus der Natur der Function entscheiden lässt, wenn nämlich die Function $f(x)$ durchgehends endlich bleibt und eine Integration zulässt.

In diesem Falle muss, wenn man das ganze Intervall von $-\pi$ bis π der Reihe nach in Stücke von der Grösse

$$\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots$$

zerlegt, und durch D_1 die grösste Schwankung der Function im ersten, durch D_2 im zweiten, u. s. w. bezeichnet,

$$\delta_1 D_1 + \delta_2 D_- + \delta_3 D_3 + \ldots$$

unendlich klein werden, so bald sämmtliche δ unendlich klein werden.

Zerlegt man aber das Integral $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin n(x-a)\, dx$, in welcher Form von dem Factor $\frac{1}{\pi}$ abgesehen die Coefficienten der Reihe enthalten sind, oder was dasselbe ist, $\int_a^{a+2\pi} f(x) \sin n(x-a)\, dx$ von $x = a$ anfangend in Integrale vom Umfange $\frac{2\pi}{n}$, so liefert jedes derselben zur Summe einen Beitrag kleiner als $\frac{2}{n}$ multiplicirt mit der grössten Schwankung in seinem Intervall, und ihre Summe ist also kleiner, als eine Grösse, welche n. V. mit $\frac{2\pi}{n}$ unendlich klein werden muss.

In der That: diese Integrale haben die Form

$$\int_{a+\frac{s}{n}2\pi}^{a+\frac{s+1}{n}2\pi} f(x) \sin n(x-a)\, dx.$$

Der Sinus wird in der ersten Hälfte positiv, in der zweiten negativ. Bezeichnet man also den grössten Werth von $f(x)$ in dem Intervall des Integrals durch M, den kleinsten durch m; so ist einleuchtend, dass man das Integral vergrössert, wenn man in der ersten Hälfte $f(x)$ durch M, in der zweiten durch m ersetzt, dass man aber das Integral verkleinert, wenn man in der ersten Hälfte $f(x)$ durch m und in der zweiten durch M ersetzt. Im ersteren Falle aber erhält man den Werth

$\frac{2}{n}(M-m)$, im letzteren $\frac{2}{n}(m-M)$. Es ist daher dies Integral abgesehen vom Zeichen kleiner als $\frac{2}{n}(M-m)$ und das Integral

$\int_a^{a+2\pi} f(x)\sin n(x-a)\,dx$ kleiner als $\frac{2}{n}(M_1-m_1)+\frac{2}{n}(M_2-m_2)+\frac{2}{n}(M_3-m_3)+\ldots$,

wenn man durch M_s den grössten, durch m_s den kleinsten Werth von $f(x)$ im $s$ten Intervall bezeichnet; diese Summe aber muss, wenn $f(x)$ einer Integration fähig ist, unendlich klein werden, sobald n unendlich gross und also der Umfang der Intervalle $\frac{2\pi}{n}$ unendlich klein wird.

In dem vorausgesetzten Falle werden daher die Coefficienten der Reihe zuletzt unendlich klein.

11.

Es bleibt nun noch der Fall zu untersuchen, wo die Glieder der Reihe Ω für den Argumentwerth x zuletzt unendlich klein werden, ohne dass dies für jeden Argumentwerth stattfindet. Dieser Fall lässt sich auf den vorigen zurückführen.

Wenn man nämlich in den Reihen für den Argumentwerth $x+t$ und $x-t$ die Glieder gleichen Ranges addirt, so erhält man die Reihe

$$2A^0+2A_1\cos t+2A_2\cos t+\ldots,$$

in welcher die Glieder für jeden Werth von t zuletzt unendlich klein werden nnd auf welche also die vorige Untersuchung angewandt werden kann.

Bezeichnet man zu diesem Ende den Werth der unendlichen Reihe

$$C+C'x+A_0\frac{xx}{2}+A_0\frac{tt}{2}-A_1\frac{\cos t}{1}-A_2\frac{\cos 2t}{4}-A_3\frac{\cos 3t}{9}-\ldots$$

durch $G(t)$, so dass $\frac{F(x+t)+F(x-t)}{2}$ überall, wo die Reihen für $F(x+t)$ und $F(x-t)$ convergiren, $=G(t)$ ist, so ergiebt sich Folgendes:

I. Wenn die Glieder der Reihe Ω für den Argumentwerth x zuletzt unendlich klein werden, so muss

$$\mu\mu\int_b^c G(t)\cos\mu(t-a)\,\lambda(t)\,dt,$$

wenn λ eine Function wie oben — Art. 9 — bezeichnet, mit wachsendem μ zuletzt unendlich klein werden. Der Werth dieses Integrals setzt sich zusammen aus den beiden Bestandtheilen

$$\mu\mu\int_b^c \frac{F(x+t)}{2}\cos\mu(t-a)\,\lambda(t)\,dt \text{ und } \mu\mu\int_b^c \frac{F(x-t)}{2}\cos\mu(t-a)\,\lambda(t)\,dt,$$

wofern diese Ausdrücke einen Werth haben. Das Unendlichkleinwerden desselben wird daher bewirkt durch das Verhalten der Function F an zwei symmetrisch zu beiden Seiten von x gelegenen Stellen. Es ist aber zu bemerken, dass hier Stellen vorkommen müssen, wo jeder Bestandtheil für sich nicht unendlich klein wird; denn sonst würden die Glieder der Reihe für jeden Argumentwerth zuletzt unendlich klein werden. Es müssen also dann die Beiträge der symmetrisch zu beiden Seiten von x gelegenen Stellen einander aufheben, so dass ihre Summe für ein unendliches μ unendlich klein wird. Hieraus folgt, dass die Reihe Ω nur für solche Werthe der Grösse x convergiren kann, zu welchen die Stellen, wo nicht $\mu\mu\int_b^c F(x)\cos\mu(x-a)\,\lambda(x)\,dx$ für ein unendliches μ unendlich klein wird, symmetrisch liegen. Offenbar kann daher nur dann, wenn die Anzahl dieser Stellen unendlich gross ist, die trigonometrische Reihe mit nicht in's Unendliche abnehmenden Coefficienten für eine unendliche Anzahl von Argumentwerthen convergiren.

Umgekehrt ist $A_n = -nn\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\left(G(t) - A_0\frac{tt}{2}\right)\cos nt\,dt$ und wird also mit wachsendem n zuletzt unendlich klein, wenn $\mu\mu\int_b^c G(t)\cos\mu(t-a)\,\lambda(t)\,dt$ für ein unendliches μ immer unendlich klein wird.

II. Wenn die Glieder der Reihe Ω für den Argumentwerth x zuletzt unendlich klein werden, so hängt es nur von dem Gange der Function $G(t)$ für ein unendlich kleines t ab, ob die Reihe convergirt

oder nicht, und zwar wird der Unterschied zwischen $A_0 + A_1 + \ldots + A_n$ und dem Integrale

$$\frac{1}{\pi}\int_0^b G(t) \frac{dd\dfrac{\sin\frac{2n+1}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}}{dt^2} \varrho(t)\,dt$$

mit wachsendem n zuletzt unendlich klein, wenn b eine zwischen 0 und π enthaltene noch so kleine Constante und $\varrho(t)$ eine solche Function bezeichnet, dass $\varrho(t)$ und $\varrho'(t)$ immer stetig und für $t = b$ gleich Null sind, $\varrho''(t)$ nicht unendlich viele Maxima und Minima hat, und für $t = 0$, $\varrho(t) = 0$, $\varrho'(t) = 0$, $\varrho''(t) = 0$, $\varrho'''(t)$ und $\varrho''''(t)$ aber endlich und stetig sind.

12.

Die Bedingungen für die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe können freilich noch etwas beschränkt und dadurch unsere Untersuchungen ohne besondere Voraussetzungen über die Natur der Function noch etwas weiter geführt werden. So z. B. kann in dem zuletzt erhaltenen Satze die Bedingung, dass $\varrho''(0) = 0$ sei weggelassen werden, wenn man in dem Integrale

$$\frac{1}{\pi}\int_0^b G(t) \frac{dd\dfrac{\sin\frac{2n+1}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}}{dt^2} \varrho(t)\,dt$$

$G(t)$ durch $G(t) - G(0)$ ersetzt. Es wird aber dadurch nichts Wesentliches gewonnen.

Indem wir uns daher zur Betrachtung besonderer Fälle wenden, wollen wir zunächst der Untersuchung für eine Function, welche nicht unendlich viele Maxima und Minima hat, diejenige Vervollständigung zu geben suchen, deren sie nach den Arbeiten Dirichlet's noch fähig ist.

Es ist oben bemerkt, dass eine solche Function allenthalben integrirt werden kann, wo sie nicht unendlich wird, und es ist offenbar, dass dies nur für eine endliche Anzahl von Argumentwerthen eintreten kann. Auch lässt der Beweis Dirichlet's, dass in dem Integralausdrucke für das $n$te Glied der Reihe und für die Summe ihrer n ersten Glieder der Beitrag aller Strecken mit Ausnahme derer, wo die Function unendlich wird, und der dem Argumentwerth der Reihe unendlich nahe liegenden mit wachsendem n zuletzt unendlich klein wird, und dass

$$\int_x^{x+b} f(t) \frac{\sin \frac{2n+1}{2}(x-t)}{\sin \frac{x-t}{2}}\, dt,$$

wenn $0 < b < \pi$ und $f(t)$ zwischen den Grenzen des Integrals nicht unendlich wird, für ein unendliches n gegen $\pi f(x+0)$ convergirt, in der That nichts zu wünschen übrig, wenn man die unnöthige Voraussetzung, dass die Function stetig sei, weglässt. Es bleibt also nur noch zu untersuchen, in welchen Fällen in diesen Integralausdrücken der Beitrag der Stellen, wo die Function unendlich wird, mit wachsendem n zuletzt unendlich klein wird. Diese Untersuchung ist noch nicht erledigt; sondern es ist nur gelegentlich von Dirichlet gezeigt, dass dies stattfindet unter der Voraussetzung, dass die darzustellende Function eine Integration zulässt, was nicht nothwendig ist.

Wir haben oben gesehen, dass, wenn die Glieder der Reihe Ω für jeden Werth von x zuletzt unendlich klein werden, die Function $F(x)$, deren zweiter Differentialquotient $f(x)$ ist, endlich und stetig sein muss, und dass

$$\frac{F(x+\alpha) - 2F(x) + F(x-\alpha)}{\alpha}$$

mit α stets unendlich klein wird. Wenn nun $F'(x-t) - F'(x-t)$ nicht unendlich viele Maxima und Minima hat, so muss es, wenn t Null wird, gegen einen festen Grenzwerth L convergiren oder unendlich gross werden, und es ist offenbar, dass

$$\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha (F'(x+t) - F'(x-t))\,dt = \frac{F(x+\alpha) - 2F(x) + F(x-\alpha)}{\alpha}$$

dann ebenfalls gegen L oder gegen ∞ convergiren muss und daher nur unendlich klein werden kann, wenn $F'(x+t) - F'(x-t)$ gegen Null convergirt. Es muss daher, wenn $f(x)$ für $x = a$ unendlich gross wird, doch immer $f(a+t) + f(a-t)$ bis an $t = 0$ integrirt werden können. Dies reicht hin, damit $(\int_b^{a-\varepsilon} + \int_{a+\varepsilon}^c) dx\, (f(x) \cos n\,(x-a))$ mit abnehmendem ε convergire und mit wachsendem n unendlich klein werde. Weil ferner die Function $F(x)$ endlich und stetig ist, so muss $F'(x)$ bis an $x = a$ eine Integration zulassen und $(x-a)\,F'(x)$ mit $(x-a)$ unendlich klein werden, wenn diese Function nicht unendlich viele Maxima und Minima hat; woraus folgt, dass $\frac{d\,(x-a)\,F'(x)}{dx} = (x-a)\,f(x) + F'(x)$ und also auch $(x-a)\,f(x)$ bis an $x = a$ integrirt werden kann. Es kann daher auch $\int f(x) \sin n\,(x-a)\,dx$ bis an $x = a$ integrirt werden, und damit die Coefficienten der Reihe zuletzt unendlich klein werden, ist offenbar nur noch nöthig, dass $\int_b^c f(x) \sin n\,(x-a)\,dx$, wo $b < a < c$, mit wachsendem n zuletzt unendlich klein werde. Setzt man $f(x)\,(x-a) = \varphi(x)$, so ist, wenn diese Function nicht unendlich viele Maxima und Minima hat, für ein unendliches n

$$\int_b^c f(x) \sin n\,(x-a)\,dx = \int_b^c \frac{\varphi(x)}{x-a} \sin n\,(x-a)\,dx = \frac{\varphi(a+0) + \varphi(a-0)}{2},$$

wie Dirichlet gezeigt hat. Es muss daher $\varphi(a+t) + \varphi(a-t) = f(a+t)\,.\,t - f(a-t)\,t$ mit t unendlich klein werden, und da $f(a+t) + f(a-t)$ bis an $t = 0$ integrirt werden kann und folglich auch $f(a+t)\,t + f(a-t)\,t$ mit t unendlich klein wird, so muss sowohl $f(a+t)\,t$, als $f(a-t)\,t$ mit abnehmendem t zuletzt unendlich klein werden. Von Functionen, welche unendlich viele Maxima und Minima haben, abgesehen, ist es also zur Darstellbarkeit der Function $f(x)$ durch eine trigonometrische Reihe mit in's Unendliche abnehmenden Coefficien-

ten hinreichend und nothwendig, dass, wenn sie für $x = a$ unendlich wird, $f(a+t)\,t$ und $f(a-t)\,t$ mit t unendlich klein werden und $f(a+t) + f(a-t)$ bis an $t = 0$ integrirt werden kann.

Durch eine trigonometrische Reihe, deren Coefficienten nicht zuletzt unendlich klein werden, kann eine Function $f(x)$, welche nicht unendlich viele Maxima und Minima hat, da $\mu\mu\int_b^c F(x) \cos \mu(x-a)\;\lambda(x)\,dx$ nur für eine endliche Anzahl von Stellen für ein unendliches μ nicht unendlich klein wird, auch nur für eine endliche Anzahl von Argumentwerthen dargestellt werden, wobei es unnöthig ist länger zu verweilen.

13.

Was die Functionen betrifft, welche unendlich viele Maxima und Minima haben, so ist es wohl nicht überflüssig zu bemerken, dass eine Function $f(x)$, welche unendlich viele Maxima und Minima hat, einer Integration durchgehends fähig sein kann, ohne durch die Fourier'sche Reihe darstellbar zu sein. Dies findet z. B. Statt, wenn $f(x)$ zwischen 0 und 2π gleich

$$\frac{d\left(x^\nu \cos \frac{1}{x}\right)}{dx}, \text{ und } 0 < \nu < \tfrac{1}{2}$$

ist. Denn es wird in dem Integal $\int_0^{2\pi} f(x) \cos n(x-a)\,dx$ mit wachsendem n der Beitrag derjenigen Stelle, wo x nahe $= \sqrt{\frac{1}{n}}$ ist, allgemein zu reden zuletzt unendlich gross, so dass das Verhältniss dieses Integrals zu

$$\tfrac{1}{2} \sin\left(2\sqrt{n} - na + \frac{\pi}{4}\right) \sqrt{\pi}\; n^{\frac{1-2\nu}{4}}$$

gegen 1 convergirt, wie man auf dem gleich anzugebenden Wege finden wird. Um dabei das Beispiel zu verallgemeinern, wodurch das Wesen der Sache mehr hervortritt, setze man

$$\int f(x)\,dx = \varphi(x)\cos\psi(x)$$

und nehme an, dass $\varphi(x)$ für ein unendlich kleines x unendlich klein und $\psi(x)$ unendlich gross werde, übrigens aber diese Functionen nebst ihren Differentialquotienten stetig seien und nicht unendlich viele Maxima und Minima haben. Es wird dann

$$f(x) = \varphi'(x)\cos\psi(x) - \varphi(x)\psi'(x)\sin\psi(x)$$

und $\int f(x)\cos n(x-a)\,dx$ gleich der Summe der vier Integrale

$$\tfrac{1}{2}\int\varphi'(x)\cos(\psi(x)\pm n(x-a))\,dx,\quad -\tfrac{1}{2}\int\varphi(x)\psi'(x)\sin(\psi(x)\pm n(x-a))\,dx.$$

Man betrachte nun, $\psi(x)$ positiv genommen, das Glied

$$-\tfrac{1}{2}\int\varphi(x)\psi'(x)\sin(\psi(x)+n(x-a))\,dx$$

und untersuche in diesem Integrale die Stelle, wo die Zeichenwechsel des Sinus sich am langsamsten folgen. Setzt man

$$\psi(x) + n(x-a) = y,$$

so geschieht dies, wo $\dfrac{dy}{dx} = 0$ ist, und also

$$\psi'(\alpha) + n = 0$$

gesetzt, für $x = \alpha$. Man untersuche also das Verhalten des Integrals

$$-\tfrac{1}{2}\int_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha+\varepsilon}\varphi(x)\psi'(x)\sin y\,dx$$

für den Fall, dass ε für ein unendliches n unendlich klein wird und führe hiezu y als Variable ein. Setzt man

$$\psi(\alpha) + n(\alpha - a) = \beta,$$

so wird für ein hinreichend kleines ε

$$y = \beta + \psi''(\alpha)\frac{(x-\alpha)^2}{2} + \ldots$$

und zwar ist $\psi''(\alpha)$ positiv, da $\psi(x)$ für ein unendlich kleines x positiv unendlich wird; es wird ferner

$$\frac{dy}{dx} = \psi''(\alpha)(x-\alpha) = \pm\sqrt{2\psi''(\alpha)(y-\beta)},\ \text{je nachdem } x-\alpha \gtrless 0$$

und

$$-\tfrac{1}{2}\int_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha+\varepsilon}\varphi(x)\psi'(x)\sin y\,dx = \tfrac{1}{2}\Big(\int_{\beta+\psi''(\alpha)\frac{\varepsilon\varepsilon}{2}}^{\beta} - \int_{\beta}^{\beta+\psi''(\alpha)\frac{\varepsilon\varepsilon}{2}}\Big)\Big(\sin y\frac{dy}{\sqrt{y-\beta}}\Big)\frac{\varphi(\alpha)\psi'(\alpha)}{\sqrt{2\psi''(\alpha)}}$$

$$= -\int_0^{\psi''(\alpha)\frac{\varepsilon\varepsilon}{2}}\sin(y+\beta)\frac{dy}{\sqrt{y}}\cdot\frac{\varphi(\alpha)\,\psi'(\alpha)}{\sqrt{2\,\psi''(\alpha)}}$$

Lässt man also mit wachsendem n die Grösse ε so abnehmen, dass $\psi''(\alpha)\varepsilon\varepsilon$ unendlich gross wird, so wird, falls $\int_0^\infty \sin(y+\beta)\frac{dy}{\sqrt{y}}$, welches bekanntlich gleich ist $\sin\left(\beta+\frac{\pi}{4}\right)\sqrt{\pi}$, nicht Null ist, von Grössen niederer Ordnung abgesehen

$$-\tfrac{1}{2}\int_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha+\varepsilon}\varphi(x)\,\psi'(x)\sin(\psi(x)+n(x-a))\,dx = -\sin\Big(\beta+\frac{\pi}{4}\Big)\frac{\sqrt{\pi}\,.\,\varphi(\alpha)\,\psi'(\alpha)}{\sqrt{2\,\psi''(\alpha)}}$$

Es wird daher, wenn diese Grösse nicht unendlich klein wird, das Verhältniss von $\int_0^{2\pi} f(x)\cos n(x-a)\,dx$ zu dieser Grösse, da dessen übrige Bestandtheile unendlich klein werden, bei unendlichem Zunehmen von n gegen 1 convergiren.

Nimmt man an, dass $\varphi(x)$ und $\psi'(x)$ für ein unendlich kleines x mit Potenzen von x von gleicher Ordnung sind und zwar $\varphi(x)$ mit x^ν und $\psi'(x)$ mit $x^{-\mu-1}$, so dass $\nu > 0$ und $\mu \geqq 0$ sein muss, so wird für ein unendliches n

$$\frac{\varphi(\alpha)\,\psi'(\alpha)}{\sqrt{2\psi''(\alpha)}}$$

von gleicher Ordnung mit $\alpha^{\nu-\frac{\mu}{2}}$ und daher nicht unendlich klein, wenn $\mu \geqq 2\nu$. Ueberhaupt aber wird, wenn $x\psi'(x)$ oder, was damit identisch ist, wenn $\frac{\psi(x)}{\log x}$ für ein unendlich kleines x unendlich gross ist, sich

$\varphi(x)$ immer so annehmen lassen, dass für ein unendlich kleines x $\varphi(x)$ unendlich klein,

$$\varphi(x)\frac{\psi'(x)}{\sqrt{2\psi''(x)}} = \frac{\varphi(x)}{\sqrt{-2\frac{d}{dx}\frac{1}{\psi'(x)}}} = \frac{\varphi(x)}{\sqrt{-2\lim\frac{1}{x\psi'(x)}}}$$

aber unendlich gross wird, und folglich $\int\limits_x f(x)\,dx$ bis an $x = 0$ erstreckt werden kann, während $\int\limits_0^{2\pi} f(x)\cos n(x-a)\,dx$ für ein unendliches n nicht unendlich klein wird. Wie man sieht, heben sich in dem Integrale $\int\limits_x f(x)\,dx$ bei unendlichem Abnehmen von x die Zuwachse des Integrals, obwohl ihr Verhältniss zu den Aenderungen von x sehr rasch wächst, wegen des raschen Zeichenwechsels der Function $f(x)$ einander auf; durch das Hinzutreten des Factors $\cos n(x-a)$ aber wird hier bewirkt, dass diese Zuwachse sich summiren.

Ebenso wohl aber, wie hienach für eine Function trotz der durchgängigen Möglichkeit der Integration die Fourier'sche Reihe nicht convergiren und selbst ihr Glied zuletzt unendlich gross werden kann, — ebenso wohl können trotz der durchgängigen Unmöglichkeit der Integration von $f(x)$ zwischen je zwei noch so nahen Werthen unendlich viele Werthe von x liegen, für welche die Reihe Ω convergirt.

Ein Beispiel liefert, (nx) in der Bedeutung, wie oben (Art. 6) genommen, die durch die Reihe

$$\sum_{1,\infty}\frac{(nx)}{n}$$

gegebene Function, welche für jeden rationalen Werth von x vorhanden ist und sich durch die trigonometrische Reihe

$$\sum_{1,\infty}{}^{n}\frac{\Sigma^{\theta}-(-)1^{\theta}}{n\pi}\sin 2nx\pi,$$

wo für θ alle Theiler von n zu setzen sind, darstellen lässt, welche aber in keinem noch so kleinen Grössenintervall zwischen endlichen Grenzen enthalten ist und folglich nirgends eine Integration zulässt.

Ein anderes Beispiel erhält man, wenn man in den Reihen

$$\sum_{0,\infty} c_n \cos nnx, \quad \sum_{1,\infty} c_n \sin nnx$$

für $c_0, c_1, c_2, \ldots$ positive Grössen setzt, welche immer abnehmen und zuletzt unendlich klein werden, während $\sum_{1,n}^{s} c_s$ mit n unendlich gross wird. Denn wenn das Verhältniss von x zu 2π rational und in den kleinsten Zahlen ausgedrückt, ein Bruch mit dem Nenner m ist, so werden offenbar diese Reihen convergiren oder ins Unendliche wachsen, je nachdem $\sum\limits_{0,m-1} \cos nnx$, $\sum\limits_{0,m-1} \sin nnx$ gleich Null oder nicht gleich Null sind. Beide Fälle aber treten nach einem bekannten Theoreme der Kreistheilung[1]) zwischen je zwei noch so engen Grenzen für unendlich viele Werthe von x ein.

In einem eben so grossen Umfange kann die Reihe Ω auch convergiren, ohne dass der Werth der Reihe

$$C' + A_0 x - \sum \frac{\frac{dA_n}{dx}}{nn},$$

welche man durch Integration jedes Gliedes aus Ω erhält, durch ein noch so kleines Grössenintervall integrirt werden könnte.

Wenn man z. B. den Ausdruck

$$\sum_{1,\infty} \frac{1}{n^3} (1-q^n) \log\left(\frac{-\log(1-q^n)}{q^n}\right),$$

wo die Logarithmen so zu nehmen sind, dass sie für $q = 0$ verschwinden, nach steigenden Potenzen von q entwickelt und darin $q = e^{xi}$ setzt, so bildet der imaginäre Theil eine trigonometrische Reihe, welche zweimal nach x differentiirt in jedem Grössenintervall unendlich oft convergirt, während ihr erster Differentialquotient unendlich oft Null wird.

In demselben Umfange, d. h. zwischen je zwei noch so nahen Ar-

1) Disquis. ar. pag. 636 art. 356.

gumentwerthen unendlich oft, kann die trigonometrische Reihe auch selbst dann convergiren, wenn ihre Coefficienten nicht zuletzt unendlich klein werden. Ein einfaches Beispiel einer solchen Reihe bildet die unendliche Reihe $\sum_{1,\infty} \sin (n!)\, x\pi$, wo $n!$, wie gebräuchlich, $= 1.\,2.\,3 \ldots n$, welche nicht bloss für jeden rationalen Werth von x convergirt, indem sie sich in eine endliche verwandelt, sondern auch für eine unendliche Anzahl von irrationalen, von denen die einfachsten sind $\sin 1$, $\cos 1$, $\frac{2}{e}$ und deren Vielfache, ungerade Vielfache von e, $\frac{e - \frac{1}{e}}{4}$, u. s. w.

R*

Inhalt.

Ueber

die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen.

Von

B. Riemann.

Aus dem Nachlass des Verfassers mitgetheilt durch R. Dedekind[1].

Plan der Untersuchung.

Bekanntlich setzt die Geometrie sowohl den Begriff des Raumes, als die ersten Grundbegriffe für die Constructionen im Raume als etwas Gegebenes voraus. Sie giebt von ihnen nur Nominaldefinitionen, während die wesentlichen Bestimmungen in Form von Axiomen auftreten. Das Verhältniss dieser Voraussetzungen bleibt dabei im Dunkeln; man sieht weder ein, ob und in wie weit ihre Verbindung nothwendig, noch a priori, ob sie möglich ist.

Diese Dunkelheit wurde auch von Euklid bis auf Legendre, um den berühmtesten neueren Bearbeiter der Geometrie zu nennen, weder von den Mathematikern, noch von den Philosophen, welche sich damit beschäftigten, gehoben. Es hatte dies seinen Grund wohl darin, dass der allgemeine Begriff mehrfach ausgedehnter Grössen, unter welchem die Raumgrössen enthalten sind, ganz unbearbeitet blieb. Ich habe mir daher zunächst die Aufgabe gestellt, den Begriff einer mehrfach ausgedehnten Grösse aus allgemeinen Grössenbegriffen zu construiren. Es wird daraus hervorgehen, dass eine mehrfach ausgedehnte Grösse ver-

1) Diese Abhandlung ist am 10. Juni 1854 von dem Verfasser bei dem zum Zweck seiner Habilitation veranstalteten Colloquium mit der philosophischen Facultät zu Göttingen vorgelesen worden. Hieraus erklärt sich die Form der Darstellung, in welcher die analytischen Untersuchungen nur angedeutet werden konnten; in einem besonderen Aufsatze gedenke ich demnächst auf dieselben zurückzukommen.

Braunschweig, im Juli 1867. R. Dedekind.

schiedener Massverhältnisse fähig ist und der Raum also nur einen besonderen Fall einer dreifach ausgedehnten Grösse bildet. Hiervon aber ist eine nothwendige Folge, dass die Sätze der Geometrie sich nicht aus allgemeinen Grössenbegriffen ableiten lassen, sondern dass diejenigen Eigenschaften, durch welche sich der Raum von anderen denkbaren dreifach ausgedehnten Grössen unterscheidet, nur aus der Erfahrung entnommen werden können. Hieraus entsteht die Aufgabe, die einfachsten Thatsachen aufzusuchen, aus denen sich die Massverhältnisse des Raumes bestimmen lassen — eine Aufgabe, die der Natur der Sache nach nicht völlig bestimmt ist; denn es lassen sich mehrere Systeme einfacher Thatsachen angeben, welche zur Bestimmung der Massverhältnisse des Raumes hinreichen; am wichtigsten ist für den gegenwärtigen Zweck das von Euklid zu Grunde gelegte. Diese Thatsachen sind wie alle Thatsachen nicht nothwendig, sondern nur von empirischer Gewissheit, sie sind Hypothesen; man kann also ihre Wahrscheinlichkeit, welche innerhalb der Grenzen der Beobachtung allerdings sehr gross ist, untersuchen und hienach über die Zulässigkeit ihrer Ausdehnung jenseits der Grenzen der Beobachtung, sowohl nach der Seite des Unmessbargrossen, als nach der Seite des Unmessbarkleinen urtheilen.

I. Begriff einer $n$fach ausgedehnten Grösse.

Indem ich nun von diesen Aufgaben zunächst die erste, die Entwicklung des Begriffs mehrfach ausgedehnter Grössen zu lösen versuche, glaube ich um so mehr auf eine nachsichtige Beurtheilung Anspruch machen zu dürfen, da ich in dergleichen Arbeiten philosophischer Natur, wo die Schwierigkeiten mehr in den Begriffen, als in der Construction liegen, wenig geübt bin und ich ausser einigen ganz kurzen Andeutungen, welche Herr Geheimer Hofrath Gauss in der zweiten Abhandlung über die biquadratischen Reste, in den Göttingenschen gelehrten Anzeigen und in seiner Jubiläumsschrift darüber gegeben hat, und einigen philosophischen Untersuchungen Herbart's, durchaus keine Vorarbeiten benutzen konnte.

§. 1.

Grössenbegriffe sind nur da möglich, wo sich ein allgemeiner Begriff vorfindet, der verschiedene Bestimmungsweisen zulässt. Je nachdem unter diesen Bestimmungsweisen von einer zu einer andern ein stetiger Uebergang stattfindet oder nicht, bilden sie eine stetige oder discrete Mannigfaltigkeit; die einzelnen Bestimmungsweisen heissen im erstern Falle Punkte, im letztern Elemente dieser Mannigfaltigkeit. Begriffe, deren Bestimmungsweisen eine discrete Mannigfaltigkeit bilden, sind so häufig, dass sich für beliebig gegebene Dinge wenigstens in den gebildeteren Sprachen immer ein Begriff auffinden lässt, unter welchem sie enthalten sind (und die Mathematiker konnten daher in der Lehre von den discreten Grössen unbedenklich von der Forderung ausgehen, gegebene Dinge als gleichartig zu betrachten), dagegen sind die Veranlassungen zur Bildung von Begriffen, deren Bestimmungsweisen eine stetige Mannigfaltigkeit bilden, im gemeinen Leben so selten, dass die Orte der Sinnengegenstände und die Farben wohl die einzigen einfachen Begriffe sind, deren Bestimmungsweisen eine mehrfach ausgedehnte Mannigfaltigkeit bilden. Häufigere Veranlassung zur Erzeugung und Ausbildung dieser Begriffe findet sich erst in der höhern Mathematik.

Bestimmte, durch ein Merkmal oder eine Grenze unterschiedene Theile einer Mannigfaltigkeit heissen Quanta. Ihre Vergleichung der Quantität nach geschieht bei den discreten Grössen durch Zählung, bei den stetigen durch Messung. Das Messen besteht in einem Aufeinanderlegen der zu vergleichenden Grössen; zum Messen wird also ein Mittel erfordert, die eine Grösse als Massstab für die andere fortzutragen. Fehlt dieses, so kann man zwei Grössen nur vergleichen, wenn die eine ein Theil der andern ist, und auch dann nur das Mehr oder Minder, nicht das Wieviel entscheiden. Die Untersuchungen, welche sich in diesem Falle über sie anstellen lassen, bilden einen allgemeinen von Massbestimmungen unabhängigen Theil der Grössenlehre, wo die Grössen nicht als unabhängig von der Lage existirend und nicht als durch eine Einheit ausdrückbar, sondern als Gebiete in einer Mannigfaltigkeit betrachtet werden. Solche Untersuchungen sind für mehrere Theile der Mathematik,

namentlich für die Behandlung der mehrwerthigen analytischen Functionen ein Bedürfniss geworden, und der Mangel derselben ist wohl eine Hauptursache, dass der berühmte Abel'sche Satz und die Leistungen von Lagrange, Pfaff, Jacobi für die allgemeine Theorie der Differentialgleichungen so lange unfruchtbar geblieben sind. Für den gegenwärtigen Zweck genügt es, aus diesem allgemeinen Theile der Lehre von den ausgedehnten Grössen, wo weiter nichts vorausgesetzt wird, als was in dem Begriffe derselben schon enthalten ist, zwei Punkte hervorzuheben, wovon der erste die Erzeugung des Begriffs einer mehrfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit, der zweite die Zurückführung der Ortsbestimmungen in einer gegebenen Mannigfaltigkeit auf Quantitätsbestimmungen betrifft und das wesentliche Kennzeichen einer $n$fachen Ausdehnung deutlich machen wird.

§. 2.

Geht man bei einem Begriffe, dessen Bestimmungsweisen eine stetige Mannigfaltigkeit bilden, von einer Bestimmungsweise auf eine bestimmte Art zu einer andern über, so bilden die durchlaufenen Bestimmungsweisen eine einfach ausgedehnte Mannigfaltigkeit, deren wesentliches Kennzeichen ist, dass in ihr von einem Punkte nur nach zwei Seiten, vorwärts oder rückwärts, ein stetiger Fortgang möglich ist. Denkt man sich nun, dass diese Mannigfaltigkeit wieder in eine andere, völlig verschiedene, übergeht, und zwar wieder auf bestimmte Art, d. h. so, dass jeder Punkt in einen bestimmten Punkt der andern übergeht, so bilden sämmtliche so erhaltene Bestimmungsweisen eine zweifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit. In ähnlicher Weise erhält man eine dreifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit, wenn man sich vorstellt, dass eine zweifach ausgedehnte in eine völlig verschiedene auf bestimmte Art übergeht, und es ist leicht zu sehen, wie man diese Construction fortsetzen kann. Wenn man, anstatt den Begriff als bestimmbar, seinen Gegenstand als veränderlich betrachtet, so kann diese Construction bezeichnet werden als eine Zusammensetzung einer Veränderlichkeit von $n+1$ Dimensionen aus einer Veränderlichkeit von n Dimensionen und aus einer Veränderlichkeit von einer Dimension.

§. 3.

Ich werde nun zeigen, wie man umgekehrt eine Veränderlichkeit, deren Gebiet gegeben ist, in eine Veränderlichkeit von einer Dimension und eine Veränderlichkeit von weniger Dimensionen zerlegen kann. Zu diesem Ende denke man sich ein veränderliches Stück einer Mannigfaltigkeit von einer Dimension — von einem festen Anfangspunkte an gerechnet, so dass die Werthe desselben unter einander vergleichbar sind — welches für jeden Punkt der gegebenen Mannigfaltigkeit einen bestimmten mit ihm stetig sich ändernden Werth hat, oder mit andern Worten, man nehme innerhalb der gegebenen Mannigfaltigkeit eine stetige Function des Orts an, und zwar eine solche Function, welche nicht längs eines Theils dieser Mannigfaltigkeit constant ist. Jedes System von Punkten, wo die Function einen constanten Werth hat, bildet dann eine stetige Mannigfaltigkeit von weniger Dimensionen, als die gegebene. Diese Mannigfaltigkeiten gehen bei Aenderung der Function stetig in einander über; man wird daher annehmen können, dass aus einer von ihnen die übrigen hervorgehen, und es wird dies, allgemein zu reden, so geschehen können, dass jeder Punkt in einen bestimmten Punkt der andern übergeht; die Ausnahmsfälle, deren Untersuchung wichtig ist, können hier unberücksichtigt bleiben. Hierdurch wird die Ortsbestimmung in der gegebenen Mannigfaltigkeit zurückgeführt auf eine Grössenbestimmung und auf eine Ortsbestimmung in einer minderfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit. Es ist nun leicht zu zeigen, dass diese Mannigfaltigkeit $n-1$ Dimensionen hat, wenn die gegebene Mannigfaltigkeit eine $n$fach ausgedehnte ist. Durch $n$malige Wiederholung dieses Verfahrens wird daher die Ortsbestimmung in einer $n$fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit auf n Grössenbestimmungen, und also die Ortsbestimmung in einer gegebenen Mannigfaltigkeit, wenn dieses möglich ist, auf eine endliche Anzahl von Quantitätsbestimmungen zurückgeführt. Es giebt indess auch Mannigfaltigkeiten, in welchen die Ortsbestimmung nicht eine endliche Zahl, sondern entweder eine unendliche Reihe oder eine stetige Mannigfaltigkeit von Grössenbestimmungen erfordert. Solche Mannigfaltigkeiten bilden z. B. die möglichen Bestimmungen einer Function

für ein gegebenes Gebiet, die möglichen Gestalten einer räumlichen Figur u. s. w.

II. Massverhältnisse, deren eine Mannigfaltigkeit von n Dimensionen fähig ist, unter der Voraussetzung, dass die Linien unabhängig von der Lage eine Länge besitzen, also jede Linie durch jede messbar ist.

Es folgt nun, nachdem der Begriff einer $n$fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit construirt und als wesentliches Kennzeichen derselben gefunden worden ist, dass sich die Ortsbestimmung in derselben auf n Grössenbestimmungen zurückführen lässt, als zweite der oben gestellten Aufgaben eine Untersuchung über die Massverhältnisse, deren eine solche Mannigfaltigkeit fähig ist, und über die Bedingungen, welche zur Bestimmung dieser Massverhältnisse hinreichen. Diese Massverhältnisse lassen sich nur in abstracten Grössenbegriffen untersuchen und im Zusammenhange nur durch Formeln darstellen; unter gewissen Voraussetzungen kann man sie indess in Verhältnisse zerlegen, welche einzeln genommen einer geometrischen Darstellung fähig sind, und hiedurch wird es möglich, die Resultate der Rechnung geometrisch auszudrücken. Es wird daher, um festen Boden zn gewinnen, zwar eine abstracte Untersuchung in Formeln nicht zu vermeiden sein, die Resultate derselben aber werden sich dann im geometrischen Gewande darstellen lassen. Zu Beidem sind die Grundlagen enthalten in der berühmten Abhandlung des Herrn Geheimen Hofraths Gauss über die krummen Flächen.

§. 1.

Massbestimmungen erfordern eine Unabhängigkeit der Grössen vom Ort, die in mehr als einer Weise stattfinden kann; die zunächst sich darbietende Annahme, welche ich hier verfolgen will, ist wohl die, dass die Länge der Linien unabhängig von der Lage sei, also jede Linie durch jede messbar sei. Wird die Ortsbestimmung auf Grössenbestimmungen zurückgeführt, also die Lage eines Punktes in der gegebenen $n$fach aus-

gedehnten Mannigfaltigkeit durch n veränderliche Grössen x_1, x_2, x_3, und so fort bis x_n ausgedrückt, so wird die Bestimmung einer Linie darauf hinauskommen, dass die Grössen x als Functionen einer Veränderlichen gegeben werden. Die Aufgabe ist dann, für die Länge der Linien einen mathematischen Ausdruck aufzustellen, zu welchem Zwecke die Grössen x als in Einheiten ausdrückbar betrachtet werden müssen. Ich werde diese Aufgabe nur unter gewissen Beschränkungen behandeln und beschränke mich erstlich auf solche Linien, in welchen die Verhältnisse zwischen den Grössen dx — den zusammengehörigen Aenderungen der Grössen x — sich stetig ändern; man kann dann die Linien in Elemente zerlegt denken, innerhalb deren die Verhältnisse der Grössen dx als constant betrachtet werden dürfen, und die Aufgabe kommt dann darauf zurück, für jeden Punkt einen allgemeinen Ausdruck des von ihm ausgehenden Linienelements ds aufzustellen, welcher also die Grössen x und die Grössen dx enthalten wird. Ich nehme nun zweitens an, dass die Länge des Linienelements, von Grössen zweiter Ordnung abgesehen, ungeändert bleibt, wenn sämmtliche Punkte desselben dieselbe unendlich kleine Ortsänderung erleiden, worin zugleich enthalten ist, dass, wenn sämmtliche Grössen dx in demselben Verhältnisse wachsen, das Linienelement sich ebenfalls in diesem Verhältnisse ändert. Unter diesen Annahmen wird das Linienelement eine beliebige homogene Function ersten Grades der Grössen dx sein können, welche ungeändert bleibt, wenn sämmtliche Grössen dx ihr Zeichen ändern, und worin die willkührlichen Constanten stetige Functionen der Grössen x sind. Um die einfachsten Fälle zu finden, suche ich zunächst einen Ausdruck für die $\overline{n-1}$fach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten, welche vom Anfangspunkte des Linienelements überall gleich weit abstehen, d. h. ich suche eine stetige Function des Orts, welche sie von einander unterscheidet. Diese wird vom Anfangspunkt aus nach allen Seiten entweder ab- oder zunehmen müssen; ich will annehmen, dass sie nach allen Seiten zunimmt und also in dem Punkte ein Minimum hat. Es muss dann, wenn ihre ersten und zweiten Differentialquotienten endlich sind, das Differential erster Ordnung verschwinden und das zweiter Ord-

nung darf nie negativ werden; ich nehme an, dass es immer positiv bleibt. Dieser Differentialausdruck zweiter Ordnung bleibt alsdann constant, wenn ds constant bleibt und wächst im quadratischen Verhältnisse, wenn die Grössen dx und also auch ds sich sämmtlich in demselben Verhältnisse ändern; er ist also $=$ const. ds^2 und folglich ist $ds =$ der Quadratwurzel aus einer immer positiven ganzen homogenen Function zweiten Grades der Grössen dx, in welcher die Coefficienten stetige Functionen der Grössen x sind. Für den Raum wird, wenn man die Lage der Punkte durch rechtwinklige Coordinaten ausdrückt, $ds = \sqrt{\Sigma(dx)^2}$; der Raum ist also unter diesem einfachsten Falle enthalten. Der nächst einfache Fall würde wohl die Mannigfaltigkeiten umfassen, in welchen sich das Linienelement durch die vierte Wurzel aus einem Differentialausdrucke vierten Grades ausdrücken lässt. Die Untersuchung dieser allgemeinern Gattung würde zwar keine wesentlich andere Principien erfordern, aber ziemlich zeitraubend sein und verhältnissmässig auf die Lehre vom Raume wenig neues Licht werfen, zumal da sich die Resultate nicht geometrisch ausdrücken lassen; ich beschränke mich daher auf die Mannigfaltigkeiten, wo das Linienelement durch die Quadratwurzel aus einem Differentialausdruck zweiten Grades ausgedrückt wird. Man kann einen solchen Ausdruck in einen andern ähnlichen transformiren, indem man für die n unabhängigen Veränderlichen Functionen von n neuen unabhängigen Veränderlichen setzt. Auf diesem Wege wird man aber nicht jeden Ausdruck in jeden transformiren können; denn der Ausdruck enthält $n\frac{n+1}{2}$ Coefficienten, welche willkührliche Functionen der unabhängigen Veränderlichen sind; durch Einführung neuer Veränderlicher wird man aber nur n Relationen genügen und also nur n der Coefficienten gegebenen Grössen gleich machen können. Es sind dann die übrigen $n\frac{n-1}{2}$ durch die Natur der darzustellenden Mannigfaltigkeit schon völlig bestimmt, und zur Bestimmung ihrer Massverhältnisse also $n\frac{n-1}{2}$ Functionen des Orts erforderlich. Die Mannig-

faltigkeiten, in welchen sich, wie in der Ebene und im Raume, das Linienelement auf die Form $\sqrt{\Sigma dx^2}$ bringen lässt, bilden daher nur einen besondern Fall der hier zu untersuchenden Mannigfaltigkeiten; sie verdienen wohl einen besondern Namen, und ich will also diese Mannigfaltigkeiten, in welchen sich das Quadrat des Linienelements auf die Summe der Quadrate von vollständigen Differentialien bringen lässt, eben nennen. Um nun die wesentlichen Verschiedenheiten sämmtlicher in der vorausgesetzten Form darstellbarer Mannigfaltigkeiten übersehen zu können, ist es nöthig, die von der Darstellungsweise herrührenden zu beseitigen, was durch Wahl der veränderlichen Grössen nach einem bestimmten Princip erreicht wird.

§. 2.

Zu diesem Ende denke man sich von einem beliebigen Punkte aus das System der von ihm ausgehenden kürzesten Linien construirt; die Lage eines unbestimmten Punktes wird dann bestimmt werden können durch die Anfangsrichtung der kürzesten Linie, in welcher er liegt, und durch seine Entfernung in derselben vom Anfangspunkte und kann daher durch die Verhältnisse dx^0 der Grössen dx in dieser kürzesten Linie und durch die Länge s dieser Linie ausgedrückt werden. Man führe nun statt dx^0 solche aus ihnen gebildete lineäre Ausdrücke $d\alpha$ ein, dass der Anfangswerth des Quadrats des Linienelements gleich der Summe der Quadrate dieser Ausdrücke wird, so dass die unabhängigen Variabeln sind: die Grösse s und die Verhältnisse der Grössen $d\alpha$; und setze schliesslich statt $d\alpha$ solche ihnen proportionale Grössen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, dass die Quadratsumme $= s^2$ wird. Führt man diese Grössen ein, so wird für unendlich kleine Werthe von x das Quadrat des Linienelements $= \Sigma dx^2$, das Glied der nächsten Ordnung in demselben aber gleich einem homogenen Ausdruck zweiten Grades der $n\,\frac{n-1}{2}$ Grössen $(x_1\,dx_2 - x_2\,dx_1)$, $(x_1\,dx_3 - x_3\,dx_1)$, $\ldots$, also eine unendlich kleine Grösse von der vierten Dimension, so dass man eine endliche Grösse erhält, wenn man sie durch das Quadrat des unendlich kleinen Dreiecks dividirt, in

dessen Eckpunkten die Werthe der Veränderlichen sind $(o, o, o, \ldots)$, $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$, $(dx_1, dx_2, dx_3, \ldots)$. Diese Grösse behält denselben Werth, so lange die Grössen x und dx in denselben binären Linearformen enthalten sind oder so lange die beiden kürzesten Linien von den Werthen o bis zu den Werthen x und von den Werthen o bis zu den Werthen dx in demselben Flächenelement bleiben, und hängt also nur von Ort und Richtung desselben ab. Sie wird offenbar $= o$, wenn die dargestellte Mannigfaltigkeit eben, d. h. das Quadrat des Linienelements auf $\Sigma\, dx^2$ reducirbar ist, und kann daher als das Mass der in diesem Punkte in dieser Flächenrichtung stattfindenden Abweichung der Mannigfaltigkeit von der Ebenheit angesehen werden. Multiplicirt mit $-\frac{3}{4}$ wird sie der Grösse gleich, welche Herr Geheimer Hofrath Gauss das Krümmungsmass einer Fläche genannt hat. Zur Bestimmung der Massverhältnisse einer $n$fach ausgedehnten in der vorausgesetzten Form darstellbaren Mannigfaltigkeit wurden vorhin $n\frac{n-1}{2}$ Functionen des Orts nöthig gefunden; wenn also das Krümmungsmass in jedem Punkte in $n\frac{n-1}{2}$ Flächenrichtungen gegeben wird, so werden daraus die Massverhältnisse der Mannigfaltigkeit sich bestimmen lassen, wofern nur zwischen diesen Werthen keine identischen Relationen stattfinden, was in der That, allgemein zu reden, nicht der Fall ist. Die Massverhältnisse dieser Mannigfaltigkeiten, wo das Linienelement durch die Quadratwurzel aus einem Differentialausdruck zweiten Grades dargestellt wird, lassen sich so auf eine von der Wahl der veränderlichen Grössen völlig unabhängige Weise ausdrücken. Ein ganz ähnlicher Weg lässt sich zu diesem Ziele auch bei den Mannigfaltigkeiten einschlagen, in welchen das Linienelement durch einen weniger einfachen Ausdruck, z. B. durch die vierte Wurzel aus einem Differentialausdruck vierten Grades, ausgedrückt wird. Es würde sich dann das Linienelement, allgemein zu reden, nicht mehr auf die Form der Quadratwurzel aus einer Quadratsumme von Differentialausdrücken bringen lassen und also in dem Ausdrucke für das Quadrat des Linienelements die Abweichung von der Ebenheit eine un-

endlich kleine Grösse von der zweiten Dimension sein, während sie bei jenen Mannigfaltigkeiten eine unendlich kleine Grösse von der vierten Dimension war. Diese Eigenthümlichkeit der letztern Mannigfaltigkeiten kann daher wohl Ebenheit in den kleinsten Theilen genannt werden. Die für den jetzigen Zweck wichtigste Eigenthümlichkeit dieser Mannigfaltigkeiten, derentwegen sie hier allein untersucht worden sind, ist aber die, dass sich die Verhältnisse der zweifach ausgedehnten geometrisch durch Flächen darstellen und die der mehrfach ausgedehnten auf die der in ihnen enthaltenen Flächen zurückführen lassen, was jetzt noch einer kurzen Erörterung bedarf.

§. 3.

In die Auffassung der Flächen mischt sich neben den inneren Massverhältnissen, bei welchen nur die Länge der Wege in ihnen in Betracht kommt, immer auch ihre Lage zu ausser ihnen gelegenen Punkten. Man kann aber von den äussern Verhältnissen abstrahiren, indem man solche Veränderungen mit ihnen vornimmt, bei denen die Länge der Linien in ihnen ungeändert bleibt, d. h. sie sich beliebig — ohne Dehnung — gebogen denkt, und alle so auseinander entstehenden Flächen als gleichartig betrachtet. Es gelten also z. B. beliebige cylindrische oder conische Flächen einer Ebene gleich, weil sie sich durch blosse Biegung aus ihr bilden lassen, wobei die innern Massverhältnisse bleiben, und sämmtliche Sätze über dieselben — also die ganze Planimetrie — ihre Gültigkeit behalten; dagegen gelten sie als wesentlich verschieden von der Kugel, welche sich nicht ohne Dehnung in eine Ebene verwandeln lässt. Nach der vorigen Untersuchung werden in jedem Punkte die innern Massverhältnisse einer zweifach ausgedehnten Grösse, wenn sich das Linienelement durch die Quadratwurzel aus einem Differentialausdruck zweiten Grades ausdrücken lässt, wie dies bei den Flächen der Fall ist, charakterisirt durch das Krümmungsmass. Dieser Grösse lässt sich nun bei den Flächen die anschauliche Bedeutung geben, dass sie das Product aus den beiden Krümmungen der Fläche in diesem Punkte ist, oder auch, dass das Product derselben in ein unendlich kleines aus kürzesten Linien gebildetes Dreieck gleich ist dem halben Ueberschusse seiner Winkel-

summe über zwei Rechte in Theilen des Halbmessers. Die erste Definition würde den Satz voraussetzen, dass das Product der beiden Krümmungshalbmesser bei der blossen Biegung einer Fläche ungeändert bleibt, die zweite, dass an demselben Orte der Ueberschuss der Winkelsumme eines unendlich kleinen Dreiecks über zwei Rechte seinem Inhalte proportional ist. Um dem Krümmungsmass einer $n$fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit in einem gegebenen Punkte und einer gegebenen durch ihn gelegten Flächenrichtung eine greifbare Bedeutung zu geben, muss man davon ausgehen, dass eine von einem Punkte ausgehende kürzeste Linie völlig bestimmt ist, wenn ihre Aufangsrichtung gegeben ist. Hienach wird man eine bestimmte Fläche erhalten, wenn man sämmtliche von dem gegebenen Punkte ausgehenden und in dem gegebenen Flächenelement liegenden Anfangsrichtungen zu kürzesten Linien verlängert, und diese Fläche hat in dem gegebenen Punkte ein bestimmtes Krümmungsmass, welches zugleich das Krümmungsmass der $n$fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit in dem gegebenen Punkte und der gegebenen Flächenrichtung ist.

§. 4.

Es sind nun noch, ehe die Anwendung auf den Raum gemacht wird, einige Betrachtungen über die ebenen Mannigfaltigkeiten im Allgemeinen nöthig, d. h. über diejenigen, in welchen das Quadrat des Linienelements durch eine Quadratsumme vollständiger Differentialien darstellbar ist.

In einer ebenen $n$fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit ist das Krümmungsmass in jedem Punkte in jeder Richtung Null; es reicht aber nach der frühern Untersuchung, um die Massverhältnisse zu bestimmen, hin zu wissen, dass es in jedem Punkte in $n\frac{n-1}{2}$ Flächenrichtungen, deren Krümmungsmasse von einander unabhängig sind, Null sei. Die Mannigfaltigkeiten, deren Krümmungsmass überall $= o$ ist, lassen sich betrachten als ein besonderer Fall derjenigen Mannigfaltigkeiten, deren Krümmungsmass allenthalben constant ist. Der gemeinsame Charakter dieser Mannigfaltigkeiten, deren Krümmungsmass constant ist, kann auch so

ausgedrückt werden, dass sich die Figuren in ihnen ohne Dehnung bewegen lassen. Denn offenbar würden die Figuren in ihnen nicht beliebig verschiebbar und drehbar sein können, wenn nicht in jedem Punkte in allen Richtungen das Krümmungsmass dasselbe wäre. Andererseits aber sind durch das Krümmungsmass die Massverhältnisse der Mannigfaltigkeit vollständig bestimmt; es sind daher um einen Punkt nach allen Richtungen die Massverhältnisse genau dieselben, wie um einen andern, und also von ihm aus dieselben Constructionen ausführbar, und folglich kann in den Mannigfaltigkeiten mit constantem Krümmungsmass den Figuren jede beliebige Lage gegeben werden. Die Massverhältnisse dieser Mannigfaltigkeiten hängen nur von dem Werthe des Krümmungsmasses ab, und in Bezug auf die analytische Darstellung mag bemerkt werden, dass, wenn man diesen Werth durch α bezeichnet, dem Ausdruck für das Linienelement die Form

$$\frac{1}{1+\frac{\alpha}{4}\Sigma x^2}\sqrt{\Sigma dx^2}$$

gegeben werden kann.

§. 5.

Zur geometrischen Erläuterung kann die Betrachtung der Flächen mit constantem Krümmungsmass dienen. Es ist leicht zu sehen, dass sich die Flächen, deren Krümmungsmass positiv ist, immer auf eine Kugel, deren Radius gleich 1 dividirt durch die Wurzel aus dem Krümmungsmass ist, wickeln lassen werden; um aber die ganze Mannigfaltigkeit dieser Flächen zu übersehen, gebe man einer derselben die Gestalt einer Kugel und den übrigen die Gestalt von Umdrehungsflächen, welche sie im Aequator berühren. Die Flächen mit grösserem Krümmungsmass, als diese Kugel, werden dann die Kugel von innen berühren und eine Gestalt annehmen, wie der äussere der Axe abgewandte Theil der Oberfläche eines Ringes; sie würden sich auf Zonen von Kugeln mit kleinerem Halbmesser wickeln lassen, aber mehr als einmal herumreichen. Die Flächen mit kleinerem positiven Krümmungsmass wird man erhalten,

wenn man aus Kugelflächen mit grösserem Radius ein von zwei grössten Halbkreisen begrenztes Stück ausschneidet und die Schnittlinien zusammenfügt. Die Fläche mit dem Krümmungsmass Null wird eine auf dem Aequator stehende Cylinderfläche sein; die Flächen mit negativem Krümmungsmass aber werden diesen Cylinder von aussen berühren und wie der innere der Axe zugewandte Theil der Oberfläche eines Ringes geformt sein. Denkt man sich diese Flächen als Ort für in ihnen bewegliche Flächenstücke, wie den Raum als Ort für Körper, so sind in allen diesen Flächen die Flächenstücke ohne Dehnung beweglich. Die Flächen mit positivem Krümmungsmass lassen sich stets so formen, dass die Flächenstücke auch ohne Biegung beliebig bewegt werden können, nämlich zu Kugelflächen, die mit negativem aber nicht. Ausser dieser Unabhängigkeit der Flächenstücke vom Ort findet bei der Fläche mit dem Krümmungsmass Null auch eine Unabhängigkeit der Richtung vom Ort statt, welche bei den übrigen Flächen nicht stattfindet.

III. Anwendung auf den Raum.

§. 1.

Nach diesen Untersuchungen über die Bestimmung der Massverhältnisse einer $n$fach ausgedehnten Grösse lassen sich nun die Bedingungen angeben, welche zur Bestimmung der Massverhältnisse des Raumes hinreichend und nothwendig sind, wenn Unabhängigkeit der Linien von der Lage und Darstellbarkeit des Linienelements durch die Quadratwurzel aus einem Differentialausdrucke zweiten Grades, also Ebenheit in den kleinsten Theilen vorausgesetzt wird.

Sie lassen sich erstens so ausdrücken, dass das Krümmungsmass in jedem Punkte in drei Flächenrichtungen $= 0$ ist, und es sind daher die Massverhältnisse des Raumes bestimmt, wenn die Winkelsumme im Dreieck allenthalben gleich zwei Rechten ist.

Setzt man aber zweitens, wie Euklid, nicht bloss eine von der Lage unabhängige Existenz der Linien, sondern auch der Körper voraus, so

folgt, dass das Krümmungsmass allenthalben constant ist, und es ist dann in allen Dreiecken die Winkelsumme bestimmt, wenn sie in einem bestimmt ist.

Endlich könnte man drittens, anstatt die Länge der Linien als unabhängig von Ort und Richtung anzunehmen, auch eine Unabhängigkeit ihrer Länge und Richtung vom Ort voraussetzen. Nach dieser Auffassung sind die Ortsänderungen oder Ortsverschiedenheiten complexe in drei unabhängige Einheiten ausdrückbare Grössen.

§. 2.

Im Laufe der bisherigen Betrachtungen wurden zunächst die Ausdehnungs- oder Gebietsverhältnisse von den Massverhältnissen gesondert, und gefunden, dass bei denselben Ausdehnungsverhältnissen verschiedene Massverhältnisse denkbar sind; es wurden dann die Systeme einfacher Massbestimmungen aufgesucht, durch welche die Massverhältnisse des Raumes völlig bestimmt sind und von welchen alle Sätze über dieselben eine nothwendige Folge sind; es bleibt nun die Frage zu erörtern, wie, in welchem Grade und in welchem Umfange diese Voraussetzungen durch die Erfahrung verbürgt werden. In dieser Beziehung findet zwischen den blossen Ausdehnungsverhältnissen und den Massverhältnissen eine wesentliche Verschiedenheit statt, insofern bei erstern, wo die möglichen Fälle eine discrete Mannigfaltigkeit bilden, die Aussagen der Erfahrung zwar nie völlig gewiss, aber nicht ungenau sind, während bei letztern, wo die möglichen Fälle eine stetige Mannigfaltigkeit bilden, jede Bestimmung aus der Erfahrung immer ungenau bleibt — es mag die Wahrscheinlichkeit, dass sie nahe richtig ist, noch so gross sein. Dieser Umstand wird wichtig bei der Ausdehnung dieser empirischen Bestimmungen über die Grenzen der Beobachtung in's Unmessbargrosse und Unmessbarkleine; denn die letztern können offenbar jenseits der Grenzen der Beobachtung immer ungenauer werden, die ersteren aber nicht.

Bei der Ausdehnung der Raumconstructionen in's Unmessbargrosse ist Unbegrenztheit und Unendlichkeit zu scheiden; jene gehört zu den Ausdehnungsverhältnissen, diese zu den Massverhältnissen. Dass der

Raum eine unbegrenzte dreifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit sei, ist eine Voraussetzung, welche bei jeder Auffassung der Aussenwelt angewandt wird, nach welcher in jedem Augenblicke das Gebiet der wirklichen Wahrnehmungen ergänzt und die möglichen Orte eines gesuchten Gegenstandes construirt werden und welche sich bei diesen Anwendungen fortwährend bestätigt. Die Unbegrenztheit des Raumes besitzt daher eine grössere empirische Gewissheit, als irgend eine äussere Erfahrung. Hieraus folgt aber die Unendlichkeit keineswegs; vielmehr würde der Raum, wenn man Unabhängigkeit der Körper vom Ort voraussetzt, ihm also ein constantes Krümmungsmass zuschreibt, nothwendig endlich sein, so bald dieses Krümmungsmass einen noch so kleinen positiven Werth hätte. Man würde, wenn man die in einem Flächenelement liegenden Anfangsrichtungen zu kürzesten Linien verlängert, eine unbegrenzte Fläche mit constantem positiven Krümmungsmass, also eine Fläche erhalten, welche in einer ebenen dreifach ausgedehnten Mannigfaltigkeit die Gestalt einer Kugelfläche annehmen würde und welche folglich endlich ist.

§. 3.

Die Fragen über das Unmessbargrosse sind für die Naturerklärung müssige Fragen. Anders verhält es sich aber mit den Fragen über das Unmessbarkleine. Auf der Genauigkeit, mit welcher wir die Erscheinungen in's Unendlichkleine verfolgen, beruht wesentlich die Erkenntniss ihres Causalzusammenhangs. Die Fortschritte der letzten Jahrhunderte in der Erkenntniss der mechanischen Natur sind fast allein bedingt durch die Genauigkeit der Construction, welche durch die Erfindung der Analysis des Unendlichen und die von Archimed, Gallilài und Newton aufgefundenen einfachen Grundbegriffe, deren sich die heutige Physik bedient, möglich geworden ist. In den Naturwissenschaften aber, wo die einfachen Grundbegriffe zu solchen Constructionen bis jetzt fehlen, verfolgt man, um den Causalzusammenhang zu erkennen, die Erscheinungen in's räumlich Kleine, so weit es das Mikroskop nur gestattet. Die Fra-

gen über die Massverhältnisse des Raumes im Unmessbarkleinen gehören also nicht zu den müssigen.

Setzt man voraus, dass die Körper unabhängig vom Ort existiren, so ist das Krümmungsmass überall constant, und es folgt dann aus den astronomischen Messungen, dass es nicht von Null verschieden sein kann; jedenfalls müsste sein reciprocer Werth eine Fläche sein, gegen welche das unsern Teleskopen zugängliche Gebiet verschwinden müsste. Wenn aber eine solche Unabhängigkeit der Körper vom Ort nicht stattfindet, so kann man aus den Massverhältnissen im Grossen nicht auf die im Unendlichkleinen schliessen; es kann dann in jedem Punkte das Krümmungsmass in drei Richtungen einen beliebigen Werth haben, wenn nur die ganze Krümmung jedes messbaren Raumtheils nicht merklich von Null verschieden ist; noch complicirtere Verhältnisse können eintreten, wenn die vorausgesetzte Darstellbarkeit eines Linienelements durch die Quadratwurzel aus einem Differentialausdruck zweiten Grades nicht stattfindet. Nun scheinen aber die empirischen Begriffe, in welchen die räumlichen Massbestimmungen gegründet sind, der Begriff des festen Körpers und des Lichtstrahls, im Unendlichkleinen ihre Gültigkeit zu verlieren; es ist also sehr wohl denkbar, dass die Massverhältnisse des Raumes im Unendlichkleinen den Voraussetzungen der Geometrie nicht gemäss sind, und dies würde man in der That annehmen müssen, sobald sich dadurch die Erscheinungen auf einfachere Weise erklären liessen.

Die Frage über die Gültigkeit der Voraussetzungen der Geometrie im Unendlichkleinen hängt zusammen mit der Frage nach dem innern Grunde der Massverhältnisse des Raumes. Bei dieser Frage, welche wohl noch zur Lehre vom Raume gerechnet werden darf, kommt die obige Bemerkung zur Anwendung, dass bei einer discreten Mannigfaltigkeit das Princip der Massverhältnisse schon in dem Begriffe dieser Mannigfaltigkeit enthalten ist, bei einer stetigen aber anders woher hinzukommen muss. Es muss also entweder das dem Raume zu Grunde liegende Wirkliche eine discrete Mannigfaltigkeit bilden, oder der Grund der Massverhältnisse ausserhalb, in darauf wirkenden bindenden Kräften, gesucht werden.

Die Entscheidung dieser Fragen kann nur gefunden werden, indem man von der bisherigen durch die Erfahrung bewährten Auffassung der Erscheinungen, wozu Newton den Grund gelegt, ausgeht und diese durch Thatsachen, die sich aus ihr nicht erklären lassen, getrieben allmählich umarbeitet; solche Untersuchungen, welche, wie die hier geführte, von allgemeinen Begriffen ausgehen, können nur dazu dienen, dass diese Arbeit nicht durch die Beschränktheit der Begriffe gehindert und der Fortschritt im Erkennen des Zusammenhangs der Dinge nicht durch überlieferte Vorurtheile gehemmt wird.

Es führt dies hinüber in das Gebiet einer andern Wissenschaft, in das Gebiet der Physik, welches wohl die Natur der heutigen Veranlassung nicht zu betreten erlaubt.

Uebersicht.

---

1) Art. I. bildet zugleich die Vorarbeit für Beiträge zur analysis situs.

2) Die Untersuchung über die möglichen Massbestimmungen einer $n$fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit ist sehr unvollständig, indess für den gegenwärtigen Zweck wohl ausreichend.

1) Der §. 3 des Art. III. bedarf noch einer Umarbeitung und weitern Ausführung.

ABHANDLUNGEN

DER

HISTORISCH-PHILOLOGISCHEN CLASSE

DER

KÖNIGLICHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN
ZU GÖTTINGEN.

DREIZEHNTER BAND.

Die Quellen Plutarchs für das Leben des Perikles.

Von

H. Sauppe.

Vorgetragen in der Sitzung der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften vom 1. December 1866.

Wer die Lebensbeschreibungen des Kimon, Perikles, Nikias, Alkibiades, welche wir von Plutarch haben, aufmerksam liest, kann sich der Einsicht nicht verschliessen, dass die des Perikles sich von den übrigen wesentlich unterscheidet. Nicht allein ist die Fülle und Bedeutung der Mittheilungen viel grösser, sondern auch die Art der Auffassung ist eine andere. Sie ist bei Kimon, Nikias und Alkibiades in sich klar und einheitlich, dagegen schwankt bei Perikles das Urtheil Plutarchs unsicher zwischen Gegensätzen hin und her. Er rühmt dessen Unbestechlichkeit und erkennt in seiner das ganze Leben hindurch bewährten Uneigennützigkeit den Grund der wunderbaren, so lange Zeit behaupteten Gewalt über den Willen und die Macht der Athener, und doch lässt er ihn sowol den samischen, als den peloponnesischen Krieg aus den erbärmlichsten Gründen beginnen. Nur Nachgiebigkeit gegen die Bitten Aspasias, persönliche Gereiztheit, Furcht bei der Rechenschaft über die Verwendung der Staatsgelder nicht bestehen zu können sollen ihn bestimmt haben.

Ohne Zweifel suchen wir den Grund dieser Unklarheit mit Recht in den Quellen, welche Plutarch für das Leben des Perikles benutzte, und der Art und Weise der Stellung, die Plutarch zu seinen Gewährsmännern einnimmt. Dabei müssen wir, wie ich glaube, besonders zwei Punkte in Erwägung ziehen. Plutarch schrieb gegen Ausgang des 1. Jahrh. nach Christus. Er war also von dem letzten seiner griechischen Helden, Philopoimen, um drei Jahrhunderte, von den Athenern, welche

ich nannte, um mehr als ein halbes Jahrtausend entfernt. Und welche Wandlungen hatte das Leben Griechenlands erfahren? Wenn wir sehn, dass die römischen Geschichtschreiber schon der ersten Kaiserzeit nicht selten für Einrichtungen und Personen der grossen Zeiten der Republik kein Verständniss haben, so dürfen wir uns nicht wundern, dass Plutarch, obgleich er Grieche war, den Kräften und dem Geiste, welche die Geschichte Athens in seiner grossen Zeit gestalteten, fremd gegenüberstand und oft bei der grössten Hingebung und Liebe sie nicht richtig auffasste. So kommt es, dass Urtheil und Verständniss in den Lebensbeschreibungen aus der griechischen und römischen Geschichte ziemlich gleichstehn. Freilich steht er als Grieche den Griechen näher, als den Römern, seine Kenntniss der griechischen Literatur ist eine umfassendere, aber diese Vortheile werden durch die bedeutendere Entfernung und die viel grössere Verschiedenheit der Zeiten aufgewogen. Wie schwer ist es doch auf der Höhe, welche die Kunst der Geschichtschreibung in unserer Zeit erreicht hat, den Gang von Ereignissen, die sich vor fünf Jahrhunderten zutrugen, die Charaktere der Männer, die dabei wirksam waren, die Verhältnisse, aus denen sie erwuchsen und die sich aus ihnen gestalteten, klar zu erkennen und darzustellen. So sehr es sich daher von selbst versteht, dass die Thatsachen, für deren Kenntniss wir oft genug allein auf Plutarch angewiesen sind, sorgfältig von der Auffassung geschieden werden müssen, die sie bei ihm gefunden haben, so ist es dennoch nicht selten geschehn, dass man die Stellung, in welche Plutarch die Thatsachen gerückt, die Folgerungen, die er aus den Thatsachen gezogen hat, auch als thatsächliche Ueberlieferung gelten liess. Nur ein Gewinn für die Geschichte selbst ist es, dass Plutarch oft zu einer bestimmten Auffassung nicht gekommen ist, sondern die widersprechenden Ueberlieferungen, die er in verschiedenen Quellen fand, die Gründe seines Schwankens, offen darlegt oder doch, wenn wir seine Darstellung mit einiger Sorgfalt prüfen, in deutlichen Spuren erkennen lässt. Dies ist, wie wir sehn werden, im Perikles der Fall.

Ferner sagt Plutarch mehr als einmal selbst, dass er nicht Geschichte schreiben, sondern Charakterbilder bedeutender Männer. um das

Streben nach Tugend zu wecken und zu mehren (Perikl. 2), geben wolle (Alex. 1. Nik. 1. Kim. 2). Daher erwähnt er von dem grossen Gang der Staatengeschichte nur, was durchaus nöthig ist, weil wir die Stellung und Einwirkung der einzelnen geschilderten Männer auf die Gestaltung der Ereignisse kennen müssen, um die geistige Eigenthümlichkeit derselben, die Tiefe und Energie ihres Denkens, ihren sittlichen Werth beurtheilen zu können (Nik. 1). Daher der Mangel an genauer Zeitbestimmung und Zeitfolge, daher das Anekdotenhafte seiner Darstellung. Wie er diese kleinen Züge braucht, um ein lebendiges Bild von dem Charakter des Einzelnen zu geben (Alex. 1. Cato min. 24. 37 z. E.), so ist er genöthigt, um sie zu finden, sich von den grossen Gesichtschreibern hinweg an geringere Schriftsteller aller Art zu wenden (Nik. 1). Es liegt aber in dem Wesen der Sache, namentlich des antiken Lebens, dass alles, was nur die Personen als solche angeht, unsicher ist: nur Wenige, die aus irgend einem Grund in nähere, persönliche Berührung mit den bedeutenden Männern gekommen waren, konnten solche Vorfälle und Aeusserungen erfahren und wissen, unabsichtliche und absichtliche Gestaltung und Entstellung hat hier den freiesten Spielraum. Hierin liegt der hauptsächlichste Grund, dass Plutarchs Berichte nur mit Misstrauen aufgenommen werden und nur nach sorgfältiger Prüfung als zuverlässig gelten dürfen. Nicht der Wunsch eine Erzählung schön abzuruuden oder eine schlagende Wirkung hervorzubringen lässt ihn irre gehn, sondern diese Richtung auf das Persönliche und Anekdotenhafte. Wenn P. L. Courier meint (oeuvr. t. 3 S. 257): „c'est un plaisant historien. qui n'ayant souci que de paraitre habile écrivain, ferait gagner à Pompée la bataille de Pharsale, si cela pouvait arronder tant soit peu sa phrase", so konnte doch wol nur der Landsmann Rousseaus, der um den Reim zu meiden den römischen Senat nicht cette assemblée de trois cents rois, sondern de deux cents nannte, ihm dies zutrauen und so Unrecht thun. Plutarch will immer die Wahrheit berichten, aber zum Verständniss wahrhaft grosser Charaktere dringt er nicht durch, sondern verliert sich in Kleinmalerei und findet nicht selten in gewöhnlichen Klatschgeschichten besonders charakteristische Züge für das Bild, welches er geben will.

Dass es bei diesem Wesen Plutarchs nothwendig sei auf das sorgfältigste seinen Quellen nachzuspüren, ist allgemein anerkannt. Und auch das ist ganz richtig längst bemerkt worden, dass eine zusammenfassende Angabe der Schriftsteller, denen er folgte, nichts fruchte, sondern dass bei jedem einzelnen Leben durch scharfe und eindringende Untersuchung die Darstellung Plutarchs in ihre Elemente zerlegt und jedes seinem Eigenthümer zugewiesen werden sollte. Dies lässt sich aber zum Theil gar nicht erreichen, oft nur mit einiger Wahrscheinlichkeit vermuthen und in jedem Fall lassen selbst die Bearbeitungen einzelner Lebensbeschreibungen noch viel zu wünschen, so Treffliches auch in manchen derselben geleistet ist.

Hoffentlich gelingt es mir bei dem Leben des Perikles das Verfahren Plutarchs anschaulich darzulegen und die Untersuchung einige Schritte weiter zu führen, als dies K. F. Hermann in dem marburger Programm vom Jahr 1836 und K. Sintenis in seinen Einleitungen bereits gethan haben.

Plutarch selbst beruft sich auf Zeitgenossen des Perikles und auf Spätere. Zeitgenossen sind Thukydides, Ion, Stesimbrotos und die Komiker Kratinos, Telekleides, Hermippos, Eupolis, Platon, Aristophanes; von denen, welche nach Perikles und dem peloponnesischen Kriege geschrieben haben, sind Ephoros, Idomeneus, Duris Geschichtschreiber, Aeschines, Platon, Aristoteles, Herakleides, Theophrastos, Kritolaos Philosophen. Zu den Geschichtschreibern aber kommt, obgleich er nicht genannt ist, Theopompos hinzu, aus dem Plutarch, wie wir sehn werden, auch im Perikles Vieles entlehnt hat Mit Ausnahme allein des Thukydides urtheilen diese Gewährsmänner alle über Perikles ungünstig und es würde, wenn wir Thukydides nicht hätten, kaum dem genialen Scharfblick selbst des grössten Geschichtsforschers gelingen, die Wirksamkeit des Perikles in ihrer wunderbaren Grösse zu erfassen und überzeugend nachzuweisen. Bei den Zeitgenossen suchten Hass und Neid, ebenso der Aristokraten als der Ochlokraten, um ihn zu bekämpfen, ihn und was er that herabzuziehen und zu verläumden. Die Höhe, auf der Perikles stand, war einsam; widerwillig oder voll scheuer Ehrfurcht und

Furcht sah das Volk zu ihm hinauf und fügte sich der Weisheit und Grösse seiner Gedanken. Als er aber gestorben war, wo sonst Hass und Neid verstummen, brach der peloponnesische Krieg die Lebenskraft des attischen Staates und die sokratische Lehre musste, indem sie ein neues Leben für den Menschen begründete, den griechischen Bürgerstaat untergraben. Der Ausgang des Krieges und Sokrates Lehre wirkten zusammen, um viele gerade der edelsten und bedeutendsten Geister gegen die Staatsform feindlich zu stimmen, welche das öffentliche Verderben herbeigeführt zu haben schien. Der Staat war nicht mehr der Mittelpunkt alles Lebens, sondern Genuss, Wissenschaft, Kunst, immer die Rücksicht auf die Individualität, waren die vorwiegend bewegenden Kräfte. So trat Perikles in éine Reihe mit den Demagogen des peloponnesischen Kriegs und die Kluft dieser Zeit rückte ihn in undeutliche Ferne. Platon stellt ihn als Verführer und Verderber des attischen Volkes dar (Gorg. 515. C ff.) und Isokrates, so günstig er auch über seine persönlichen Eigenschaften urtheilt (8 §. 126. 15 §. 111. 234. 307), nennt ihn doch auch nur einen guten Demagogen; Aristoteles (Plut. Nik. 2) führt als die drei besten Bürger, die von den Vätern ererbtes Wohlwollen und Neigung für das Volk hegten, Nikias, Thukydides, des Melesias Sohn, und Theramenes an, nicht Perikles, den Sohn des Siegers von Mykale. So würden wir also von Perikles eine wesentlich falsche Vorstellung haben oder mit Mühe ein richtigeres Urtheil nur vermuthungsweise gewinnen, wenn wir nicht Thukydides Darstellung hätten, der dadurch, dass er die Grösse des Perikles klar erkannte und freudig anerkannte, am schönsten die Grösse seines eigenen Geistes gezeigt hat.

Um nun das Verhältniss Plutarchs zu diesen Quellen genauer zu bestimmen, müssen wir in wenigen Sätzen eine Disposition der Lebensbeschreibung geben. Nach kurzer Einleitung (K. 1. 2) spricht er über Herkunft und äussere Gestalt (K. 3), Erziehung und Bildung des Perikles (K. 4) und die dadurch gewonnenen hervorstechenden Eigenschaften, hohen Ernst und Seelenruhe, die weder Leidenschaften noch Aberglaube zu stören vermögen: K. 5. 6. Dann erörtert er die politische Richtung und sucht zu zeigen, warum sich Perikles trotz seines aristo-

kratischen Wesens der Demokratie zugewendet habe, später aber, nachdem er alle Gegner überwunden, zu seiner strengen, mehr aristokratischen Haltung zurückgekehrt sei: K. 7—15[1]). In seiner Uneigennützigkeit, der Grossartigkeit seiner Pläne, der Vorsicht bei der Kriegführung und dem weisen Zusammenhalten der Kräfte Athens erkennt er die Gründe, welche seinem Einfluss so lange Dauer sicherten: K. 16—23[2]). Nachdem er hierbei flüchtig einige seiner früheren Kriegszüge erwähnt hat, handelt er ausführlicher über den samischen Krieg und dabei gelegentlich über Aspasia: K. 24—28. Dann spricht er über den Beginn und die Ursachen des peloponnesischen Kriegs (K. 29—32) und die ersten Kriegsjahre, soweit Perikles dabei betheiligt war: K. 32—37. Was dann noch K. 38 über seine Krankheit erzählt wird, dient nur als Uebergang zu einem kurzen Schlussurtheil über die sittliche Grösse des Mannes: K. 39.

Aus dieser Uebersicht erhellt, dass Plutarch nicht der Zeitfolge nachgeht. Die Bauten alle und die Aussendung der Kolonien erwähnt er nur als Mittel die Volksgunst zu gewinnen und zu erhalten (K. 11. 12), ferner z. B. die Schlacht bei Koronea (447) K. 18, den Zug des Perikles um den Peloponnes (454) K. 19, den heiligen Krieg (448) K. 21. Von den geschichtlichen Thatsachen wird offenbar in knappen Umrissen

---

1) K. 7 §. 3 heisst es *ὁ δὲ καὶ τοῦ δήμου τὸ συνεχὲς φεύγων καὶ τὸν κόρον οἷον ἐκ διαλειμμάτων ἐπλησίαζεν.* Weder sieht man recht, was *τὸ συνεχὲς τοῦ δήμου* sein solle, noch lassen sich *τὸ συνεχὲς τοῦ δήμου*, wenn man es etwa *stete Gegenwart des Volkes* erklärt, und *τὸν κόρον* gut neben einander stellen, und bei *ἐπλησίαζεν* vermisst man das Objekt. Ich glaube daher, dass Pl. *τῷ δήμῳ* geschrieben habe, so dass zu *τὸ συνεχὲς* dann *τοῦ πλησιάζειν* zu verstehen ist. — Nach K. 10 §. 2 *τὸ ψήφισμα γράψας αὐτός* muss man Kimon K. 17 z. E. schreiben *τὸ ψήφισμα γράψαντος αὐτοῦ Περικλέους* für *αὐτῷ*.

2) K. 19 §. 1 ist wol nach *Θρᾳκῶν* der Artikel *τῶν* hinzuzufügen, da *τῶν Θρᾳκῶν* mit *τὰς καταδρομὰς* zusammengehört und nun durch *τῶν περικεχυμένων τῇ Χερρονήσῳ* näher bestimmt wird. — K. 23 §. 2 hat Plutarch ohne Zweifel nicht *εὐθὺς οὖν* —, sondern *αὖθις οὖν* — geschrieben, gerade wie K. 25 §. 2. Vgl. Thukyd. 1, 114 *καὶ Ἀθηναῖοι πάλιν ἐς Εὔβοιαν διαβάντες — κατεστρέψαντο πᾶσαν.* welche Worte Plutarch offenbar vor Augen hatte, so aber, dass er, wahrscheinlich aus Ephoros, nähere Angaben einfügte.

nur so viel erzählt, als durchaus nothwendig ist, um in der Art und Weise, wie sich Perikles daran betheiligte, den Charakter desselben erkennen lassen zu können. Ueberall sind kleine Züge und Aeusserungen rein persönlichen Inhalts eingefügt. Auch in dem Leben des Perikles also befolgt er, was er Nikias K. 1 über sein Verfahren sagt: *ἃς γοῦν Θουκυδίδης ἐξήνεγκε πράξεις καὶ Φίλιστος*[1]*), ἐπεὶ παρελθεῖν οὐκ ἔστι, μάλιστά γε δὴ τὸν τρόπον καὶ τὴν διάθεσιν τοῦ ἀνδρὸς ὑπὸ πολλῶν καὶ μεγάλων παθῶν καλυπτομένην περιεχούσας, ἐπιδραμὼν βραχέως καὶ διὰ τῶν ἀναγκαίων, ἵνα μὴ παντάπασιν ἀμελὴς δοκῶ καὶ ἀργὸς εἶναι, τὰ διαφεύγοντα τοὺς πολλούς, ὑφ' ἑτέρων δ' εἰρημένα σποράδην ἢ πρὸς ἀναθήμασιν ἢ ψηφίσμασιν εὑρημένα παλαιοῖς πεπείραμαι συναγαγεῖν, οὐ τὴν ἄχρηστον ἀθροίζων ἱστορίαν, ἀλλὰ τὴν πρὸς κατανόησιν ἤθους καὶ τρόπου παραδιδούς.*

Deutlich lässt sich dies an dem sehn, was er vom samischen Kriege erzählt. Die nothwendigen Grundzüge giebt er nach Thukydides 1, 115—117. Es sind folgende: 1. *αἱ γὰρ πόλεις ἐπολέμουν τὸν περὶ Πριήνης πόλεμον* (K. 25). — 2. *πλεύσας οὖν ὁ Περικλῆς τὴν μὲν οὖσαν ὀλιγαρχίαν ἐν Σάμῳ κατέλυσε, τῶν δὲ πρώτων λαβὼν ὁμήρους πεντήκοντα καὶ παῖδας ἴσους εἰς Λῆμνον ἀπέστειλε.* — 3. *χρησάμενος ὥσπερ ἐγνώκει τοῖς Σαμίοις καὶ καταστήσας δημοκρατίαν ἀπέπλευσεν εἰς τὰς Ἀθήνας. οἱ δ' εὐθὺς ἀπέστησαν* bis zu den Worten *εἰς τὸν ἔξω πόντον* in K. 26. — 4. *πλεύσαντος γὰρ αὐτοῦ — καὶ γενομένης μάχης νικήσαντες οἱ Σάμιοι καὶ πολλοὺς μὲν αὐτῶν ἄνδρας ἑλόντες, πολλὰς δὲ ναῦς διαφθείραντες ἐχρῶντο τῇ θαλάσσῃ καὶ παρετίθεντο τῶν ἀναγκαίων πρὸς τὸν πόλεμον ὅσα μὴ πρότερο εἶχον.* — 5. (K. 27): *πυθόμενος δ' οὖν ὁ Περικλῆς τὴν ἐπὶ στρατοπέδου συμφορὰν ἐβοήθει κατὰ τάχος καὶ — κρατήσας καὶ τρεψάμενος τοὺς πολεμίους εὐθὺς περιετείχιζε.* — 6. (K. 28): *ἐννάτῳ δὲ μηνὶ τῶν Σαμίων πα-*

1) Die Worte *καὶ Φίλιστος* sind wol irrthümlicher Zusatz aus dem Anfang des Kapitels, aber dort wird Philistos nur in Bezug auf Timäos erwähnt, während Plutarch hier nur davor sich schützen will, dass man meinen könne, er habe durch seine Erzählung mit Thukydides in Wettkampf treten wollen. Streicht man *καὶ Φίλιστος*, so passt auch dann der Singular *ἐξήνεγκε* besser, obgleich er sich ja freilich auch wenn sie stehn bleiben entschuldigen lässt.

ϱαστάντων ὁ Περικλῆς τὰ τείχη καθεῖλε καὶ τὰς ναῦς παρέλαβε καὶ χρήμασι πολλοῖς ἐζημίωσεν· ὧν τὰ μὲν εὐθὺς ἤνεγκαν οἱ Σάμιοι, τὰ δ' ἐν χρόνῳ ῥητῷ ταξάμενοι κατοίσειν ὁμήρους ἔδωκαν. Und dass diese einfachen Angaben nicht etwa nur, weil dieselben Sachen erzählt werden mussten, mit Thukydides dem Inhalt nach übereinstimmen, sondern wirklich unmittelbar auf Thukydides zurückweisen, zeigt die Gleichheit keineswegs ganz gewöhnlicher Wendungen, wie *λαβὼν ὁμήρους πεντήκοντα καὶ παῖδας ἴσους*, oder *ὧν εἴκοσι στρατιώτιδες ἦσαν*, und *ταξάμενοι ἀποδοῦναι.* Plutarch hat Thukydides dennoch nirgends ausdrücklich genannt, aber die Worte K. 28 *ὠμότητα — ἣν οὔτε Θουκυδίδης ἱστόρηκεν οὔτ' Ἔφορος οὔτ' Ἀριστοτέλης* geben hinreichende Andeutung, welches die Hauptquellen seien, aus denen er die Geschichte des samischen Zuges genommen. Bei allem dem also, was zu den sechs aus Thukydides stammenden Sätzen hinzugefügt ist, werden wir, wenn nicht für Einzelnes der Gewährsmann besonders genannt ist, an Ephoros oder Aristoteles zu denken haben. Dafür spricht auch, dass Plutarch für die Nachricht über Artemons Maschinen, die er zwischen Satz 5 und 6 einschiebt, sich ausdrücklich auf Ephoros beruft. Auch Diodor 12, 28 erwähnt, dass Perikles sich dieser Maschinen bedient habe; da aber bekanntlich Diodor im allgemeinen Ephoros folgt und die Erzählung Diodors fast durchaus mit Thukydides stimmt[1]), so dürfen wir annehmen, dass Ephoros in allem Wesentlichen den samischen Krieg wie Thukydides erzählte, wohl aber noch eine Anzahl näherer Umstände der Erzählung desselben hinzufügte. Also werden wir die Angabe, dass Aspasia Perikles beredet habe, gegen die Samier auf die Seite Milets zu treten (K. 25 vor Satz 1 aus Thukydides), dass die Samier sich einer gerichtlichen Entscheidung nicht unterwerfen wollten (zwischen Satz 1 und 2), über die Bestechungsversuche,

---

1) Bei Diodor 12, 27 steht *πραξάμενος δὲ παρὰ τῶν Σαμίων ὀγδοήκοντα τάλαντα καὶ τοὺς ἴσους ὁμήρους παῖδας λαβὼν —.* Das ist schwerlich richtig, sondern nach Thukydides 1, 115 und Plut. Perikl. 25 müssen wir nach *τάλαντα καὶ* etwa die Worte *πεντήκοντα ἄνδρας καὶ* ausgefallen denken. Auch K. 28 z. E. hat schon Orelli zu Isokr. Antid. p. 256 mit Recht den Ausfall der Zahl *καὶ χιλίων* nach *διακοσίων* vermuthet.

welche die samischen Aristokraten und Pissuthnes machten (zwischen 2 und 3), dass der Philosoph Melissos die Athener in Perikles Abwesenheit besiegt (in Satz 4 nach den Worten *πλεύσαντος γὰρ αὐτοῦ*) und dann gegen Perikles unglücklich gekämpft habe (in Satz 5 nach *κατὰ τάχος καὶ*), dass Perikles durch Einschliessung, nicht durch Kampf die Sache beenden wollte (nach Satz 5), — alles dies werden wir mit einiger Wahrscheinlichkeit Ephoros zuschreiben dürfen. Allerdings sagt Harpokration u. d. W. *Ἀσπασία: δοκεῖ δὲ δυοῖν πολέμων αἰτία γεγονέναι, τοῦ τε Σαμιακοῦ καὶ τοῦ Πελοποννησιακοῦ, ὡς ἔστι μαθεῖν παρά τε Δούριδος τοῦ Σαμίου καὶ Θεοφράστου ἐκ τοῦ δ' τῶν Πολιτικῶν.* und man könnte danach vermuthen, dass Plutarch diese thörichte Ansicht aus Duris oder Theophrast entlehnt habe, aber diese pflegt er zu nennen, weil er ihnen misstraut, und dass wir dem Ephoros nicht Unrecht thun, wenn wir ihn Aspasia die Schuld am samischen Kriege beimessen lassen, beweist seine Ansicht über die Ursachen des peloponnesischen Kriegs. Für Einzelnes nennt Plutarch K. 26 Stesimbrotos, aber um dessen Meinung der der *πλεῖστοι*, d. h. ohne Zweifel des Thukydides, Ephoros und Aristoteles, gegenüber zu verwerfen. Aus demselben Stesimbrotos, dessen Schrift *Περὶ Θεμιστοκλέους καὶ Θουκυδίδου καὶ Περικλέους* (Sintenis zu Plut. Them. p. 14 fgg. C. F. Herm. ind. lect. 1836 p. VIII sq. Heuer de Stes. Thasii reliquiis. Münster 1863) ohne Zweifel über Perikles ziemlich ausführlich war, scheint auch, ohne dass er genannt ist, das entlehnt zu sein, was K. 28 über die Grabrede des Perikles und die Aeusserung Elpinikes erzählt wird, denn K. 8 erscheint für eine Stelle dieser Grabrede Stesimbrotos ausdrücklich als Gewährsmann [1]). — K. 28 weist Plutarch entschieden eine Angabe bei Duris ab. Aus demselben stammt, wie Hulleman zu Duris p. 161 und Naber zu Photius Lex. 2 p. 144 mit Recht aus Photius u. *Σαμίων ὁ δῆμος* — schliessen, die Erzählung über die Brandmarkung der gegenseitigen Gefangenen der Athener und Samier [2]). Viel-

1) Für *οὐ γὰρ ἐκείνους αὐτοὺς ὁρῶμεν* steht richtig in der HS. F *οὐδὲ γὰρ* —. So erst schliesst sich der Beweis richtig an die Behauptung des Perikles an. Wahrscheinlich ist dann *ταὐτὰ (ταὔτ')* für *ταῦτα* zu accentuiren.

2) Bei Photius u. *τὰ Σαμίων ὑποπτεύεις* ist wohl am Schlusse nach *ἔστιξαν* noch

leicht darf man auch die verkehrte Erklärung des sprichwörtlichen *λευκὴ ἡμέρα* K. 27 auf Duris zurückführen[1]). — So bleibt von der Darstellung der samischen Kriege K. 24—28 nur noch die Episode über Aspasia K. 24. und es ist zweifelhaft, ob Plutarch die wenig eingehenden Mittheilungen auch aus Stesimbrotos oder den zahlreichen Schriften über die attischen Hetären (A. Nauck Aristoph. Byz. p. 277 f. Leutsch in der Hall. Encyclop. 1, 70 S. 352) entnahm. Was er aus Aeschines, Platon, vielleicht auch, was er aus den Komikern anführt, kannte er aus eigenem Lesen, obgleich die Uebereinstimmung mit dem Schol. zu Platon p. 391 Bkk. auf eine gemeinschaftliche Quelle weist. Wie wenig aber selbst solchen Zeugen, die der Zeit nach sehr nahe waren, zu trauen ist, zeigt deutlich die Angabe über Lysikles aus Aeschines, ohne Zweifel dem Dialog desselben Aspasia (C. F. Hermann, de Aeschinis Socratici reliquiis p. 16 sqq.). Durch den Umgang mit Aspasia nach Perikles Tod soll Lysikles *ἐξ ἀγεννοῦς καὶ ταπεινοῦ τὴν φύσιν* der erste der Athener oder, wie der Schol. zu Platon sagt, *ῥήτωρ δεινότατος* geworden sein. Wie rasch ist das gegangen. Perikles starb im Herbst 429 und Lysikles im Anfang des Winters 428 (Thuk. 3, 19). Wie kann er, wenn wir auch vielleicht glauben wollten, dass Aspasia gemein genug gedacht und empfunden habe, um unmittelbar nach Perikles Verlust sich im Umgang mit Lysikles zu trösten, im Laufe eines Jahres durch den Verkehr mit ihr zum grossen Staatsmann geworden sein? An einen Umgang des Lysikles mit Aspasia vor Perikles Tode zu denken ist an sich nicht rathsam und widerspricht jedesfalls der Meinung des Aeschines, wie sie Plu-

---

γλαυκί hinzuzusetzen. Der Gegensatz *σαμαίνῃ* fordert das, wie in der ersten Glosse *Σαμίων ὁ δῆμος*.

1) Hier widersprechen die Worte *τῶν ἄλλων μαχομένων* dem, was vorher über Perikles Absicht gesagt ist, und namentlich auch der Aeusserung *μάχεσθαι προθυμουμένους ἔργον ἦν κατασχεῖν* und *εὐωχεῖσθαι καὶ σχολάζειν*. Wahrscheinlich schrieb Plutarch *τειχομένων*. Die Athener sollten ja nach Perikles nicht kämpfen, sondern nur durch die ungefährliche Arbeit der Ummauerung Samos bezwingen. Auch muss es wol nachher *γινομένους* für *γενομένους* heissen. — Für das Sprichwort vgl. man die Bemerkungen von Blomfield zu Aesch. Pers. 306 und Leutsch Paroemiogr. gr. 1 p. 428 sq.

tarch wiedergiebt. Wir haben höchst wahrscheinlich in dieser ganzen Geschichte die Erfindung, kaum des Aeschines, wie Cobet prosopogr. Xenoph. p. 81 vermuthet, sondern eines Komikers zu erkennen, auf dessen Rechnung auch der Sohn des Lysikles und der Aspasia, Poristes, zu setzen ist [1]).

Für ein zweites längeres Stück der plutarchischen Lebensbeschreibung ist längst auf die Quelle hingewiesen worden. Diodor 12, 41 sagt: *αἰτίαι μὲν οὖν τοῦ Πελοποννησιακοῦ πολέμου τοιαῦταί τινες ὑπῆρξαν, ὡς Ἔφορος ἀνέγραψε* und die Veranlassungen, die er vorher K. 38 ff. entwickelt hat, sind dieselben, welche Plutarch K. 31. 32 angiebt. Zwar schickt er K. 31 voraus, dass *nach Einigen* Perikles im richtigen Verständniss der politischen Lage, weil jedes Zugeständniss an die Lakedaemonier nur als ein Eingeständniss der Schwäche gelten werde, die Zurücknahme des megarischen Psephisma widerrathen habe, womit er auf Thukydides hinweist, ferner, dass *Andere* schroffen Stolz (*αὐθάδεια*) und Ehrgeiz als

---

1) Lysikles heisst bei Aristoph. Ritter 132 *προβατοπώλης* und daher bei Plut. Per. K. 24 und im Schol. zu Platon *προβατοκάπηλος*. Ohne Zweifel auch bei Dio Chrysost. 55, 22. Dieser rühmt von Sokrates, dass er mit jedem in seiner Sprache redete, und sagt nach den HSS. *ἀλλ' Ἀνύτῳ μὲν διαλεγόμενος βυρσέων ἐμέμνητο καὶ σκυτοτόμων, εἰ δὲ Λυσικλεῖ διαλέγοιτο, προβάτων καὶ καπήλων, Λύκωνι δὲ δικῶν καὶ συκοφαντημάτων καὶ ἀμνίων καὶ κῳδίων, Μένωνι δὲ τῷ Θετταλῷ περὶ ἐραστῶν καὶ ἐρωμένων.* Da passen freilich die Worte *προβάτων καὶ καπήλων* eben so wenig, als *καὶ ἀμνίων καὶ κῳδίων* und sehr schön ist die Vermuthung K. F. Hermanns (bei Emperius z. d. St. Dions und in der angef. Abh. S. 17), dass *ἀμνίων καὶ κῳδίων* zu Lysikles gehöre, aber Unrecht hat er, wenn er *προβάτων καὶ καπήλων* als Glossem streichen will. Vielmehr schrieb Dio *εἰ δὲ Λυσικλεῖ διαλέγοιτο τῷ προβατοκαπήλῳ, ἀμνίων καὶ κῳδίων, Λύκωνι δέ, δικῶν καὶ συκοφαντημάτων, Μένωνι δὲ —.* Freilich haben *Ἀνύτῳ* und *Λύκωνι* keine Appositionen, aber doch *Μένωνι* gerade so *τῷ Θετταλῷ*. Bei Photius Lex. p. 450, 5 heisst es *προβατοκάπηλος· προβατοπώλης· ἐλέγετο δὲ Λυσικλῆς.* Das ist dieselbe Bemerkung, die bei Hesych. u. d. W. *προβατοπώλης* steht und sich auf die Stelle des Aristophanes bezieht. Daher muss man auch bei Photius umstellen: *προβατοπώλης· προβατοκάπηλος· ἐλέγετο δὲ Λυσικλῆς.*

die Gründe angaben, welche Perikles bewogen, was vielleicht auf Theopompos zu beziehen ist. Aber dann erzählt er doch ausführlich nach Ephoros, dass nur ganz persönliche Besorgnisse, für Pheidias, Aspasia, Anaxagoras und sich selbst, ihn bestimmten, den Krieg gegen Lakedämon zum Ausbruch zu bringen [1]. Die Abweichungen von Diodor sind gering und betreffen nur Einzelnheiten. Ob da Diodor nachlässig wiedererzählt oder Plutarch anderwärtsher kleine Zusätze gemacht habe, lässt sich nicht entscheiden. Wenn auch Plutarch mit den Worten schliesst: *αἱ μὲν οὖν αἰτίαι, δι' ἃς οὐκ εἴασεν ἐνδοῦναι Λακεδαιμονίοις τὸν δῆμον, αὗται λέγονται, τὸ δ' ἀληθὲς ἄδηλον,* so zeigen doch Aeusserungen, wie Nik. 9 *ὁ μὲν γὰρ ἐπ' αἰτίαις μικραῖς εἰς συμφορὰς μεγάλας ἐμβαλεῖν ἐδόκει τοὺς Ἕλληνας,* dass die Ausführlichkeit, mit der er diese Veranlassungen erzählt, gegenüber der Kürze, deren er sich bei Erwähnung der entgegenstehenden Ansichten bedient, nur ein Beweis für seine eigene Zustimmung ist.

Lehrreich und merkwürdig ist der Versuch, den Plutarch K. 9—15

1) Plutarch sagt K. 31 *Μένωνά τινα τῶν Φειδίου συνεργῶν πείσαντες ἱκέτην ἐν ἀγορᾷ καθίζουσιν,* Diodor 12, 39 *τῶν δὲ συνεργασαμένων τῷ Φειδίᾳ τινὲς διενεχθέντες ὑπὸ τῶν ἐχθρῶν τοῦ Περικλέους ἐκάθισαν ἐπὶ τὸν τῶν θεῶν βωμόν.* Aus der Vergleichung der beiden Stellen erkennt man, dass der Altar der zwölf Götter gemeint ist, der auf dem Markte stand (Thuk. 6, 54. Curtius att. Studien 2 S. 34 f.). Zu ihm flüchteten die Platäer (Herodot. 6, 108) und in der Nähe desselben befand sich der Altar des *Ἔλεος* (Taylor zu Lysias p. 68 sq. Rsk.), zu dem die Herakliden geflüchtet sein sollten (Apollod. 2. 8, 1. Pflugk zu Eurip. Herakl. p. 6). Also ist höchst wahrscheinlich auch bei Diodor zu lesen *ἐπὶ τὸν τῶν ιβ' θεῶν βωμόν.* Denn was soll das heissen *ἐπὶ τὸν τῶν θεῶν βωμόν*? Allerwenigstens müsste es *ἐπὶ τῶν τῶν θεῶν βωμῶν* (wenn das gienge) oder *τοὺς — βωμοὺς* heissen, wie bei [Lysias] 2 §. 11. — Bei Plutarch K. 31 §. 2 heisst es sodann *προσδεξαμένου δὲ τοῦ δήμου τὸν ἄνθρωπον καὶ γενομένης ἐν ἐκκλησίᾳ διώξεως.* Was sollen die letzten Worte bedeuten? Es ist doch wohl von einer *προβολὴ* die Rede: das Volk giebt dem *μηνυτὴς* die *ἄδεια* und spricht sich für die gerichtliche Verfolgung des Pheidias aus. Die Untersuchung selbst konnte in der Volksversammlung nicht erfolgen, wie schon die angeführten Einzelnheiten zeigen. Plutarch schrieb wol: *ἐν ἐκκλησίᾳ καὶ γενομένης διώξεως.*

macht, zu erklären, wie Perikles erst bei einem von Natur aristokratisch angelegten Wesen (vgl. K. 7 §. 1) doch entschiedener Förderer und Begründer einer rein demokratischen Verfassung geworden sei, der dem Volke in allem zu Willen war und den Wünschen desselben entgegen kam, und wie dennoch später wieder Thukydides über seine Staatsverwaltung die berühmten Worte sagen konnte (2, 65): *ἐγίγνετο λόγῳ μὲν δημοκρατία, ἔργῳ δὲ ὑπὸ τοῦ πρώτου ἀνδρὸς ἀρχή.* Er führt alles auf persönlichen Ehrgeiz zurück. Da Perikles, sagt er, im Reichthum Kimon nachstand und es ihm in Freigebigkeit nicht gleich thun konnte, so musste er durch Geldspenden aus dem öffentlichen Schatze, durch glänzende Bauten, an denen alle, auch die ärmsten Theile der Bevölkerung bedeutend verdienten, durch Beutezüge, durch Aussendungen von Kolonieen die Menge gewinnen. Da ihm deshalb die aristokratische Partei erst unter Kimons, dann noch straffer als Gesammtheit geordnet und gegliedert unter Thukydides, des Sohnes des Melesias, Leitung entgegentrat, so musste er die aristokratischen Einrichtungen des Staates, namentlich den Areopag, beseitigen. Als er aber seine Gegner niedergeworfen und aller Einfluss unbestritten nur ihm gehörte, da habe er dann, seinem innersten Wesen gemäss, nicht mehr den Neigungen des Volkes sich willfährig gezeigt, sondern mit fester Hand dasselbe nach seinem Willen geleitet. Nicht der grosse Gedanke, wie Athen zu einem Staate, der für alle Zeiten der Bewunderung sicher sei, emporgehoben werden könne, was zu diesem Zwecke fallen, was neu geschaffen werden müsse, wie äussere Macht des Staates, Gefühl des Wohlseins im Innern, veredelnde Wirkung der Poesie und Kunst auf alle Bürger sich erreichen lassen, bestimmen die Handlungsweise des Perikles, sondern alles ist kluge Berechnung, wie er selbst der mächtigste Mann in der Stadt werden und bleiben könne. Wir sehn, es ist ganz die Art Plutarchs die Sachen anzusehn, aber so wenig wir uns Thukydides entgegen durch dies Urtheil bestimmen lassen, so wichtig und anziehend sind die Fragen, woher Plutarch die Thatsachen genommen habe, die er zur Begründung seiner Ansichten anführt, und ob er nur diese, oder auch die daraus gezogenen Schlüsse, die ganze Auffassung irgend woher entlehnt habe.

Gleich zu Anfang schildert er (K. 9 §. 2) die Freigebigkeit Kimons. Das Gesagte hier und Kimon K. 10 entspricht bis auf die Worte dem, was Athenäus 12 p. 533. A (= Frg. 94 bei Müller) aus Theopompos anführt: *ἐν τῇ δεκάτῃ τῶν Φιλιππικῶν ὁ Θεόπομπός φησι· „Κίμων ὁ Ἀθηναῖος ἐν τοῖς ἀγροῖς καὶ τοῖς κήποις οὐδένα τοῦ καρποῦ καθίστα φύλακα, ὅπως οἱ βουλόμενοι τῶν πολιτῶν εἰσιόντες ὀπωρίζωνται καὶ λαμβάνωσιν, εἴ τινος δέοιντο τῶν ἐν τοῖς χωρίοις. ἔπειτα τὴν οἰκίαν παρεῖχε κοινὴν ἅπασι· καὶ* (wol *ἅπασιν, ὡς*) *δεῖπνον ἀεὶ εὐτελὲς παρασκευάζεσθαι πολλοῖς ἀνθρώποις καὶ τοὺς ἀπόρους*[1]) *τῶν Ἀθηναίων εἰσιόντας δειπνεῖν. ἐθεράπευε δὲ καὶ τοὺς καθ' ἑκάστην ἡμέραν αὐτοῦ τι δεομένους, καὶ λέγουσιν, ὡς περιήγετο ἐν ἀεὶ νεανίσκους δύ' ἢ τρεῖς ἔχοντας κέρματα, τούτοις τε* (vielmehr *δὲ*) *διδόναι προσέταττεν, ὁπότε τις προσέλθοι αὐτοῦ δεόμενος· καί φασι μὲν αὐτὸν καὶ εἰς ταφὴν εἰσφέρειν, ποιεῖν δὲ καὶ τοῦτο πολλάκις, ὁπότε τῶν πολιτῶν τινα ἴδοι κακῶς ἠμφιεσμένον, κελεύειν αὐτῷ μεταμφιέννυσθαι τῶν νεανίσκων τινὰ τῶν συνακολουθούντων αὐτῷ“.* Im zehnten Buche nemlich seiner philippischen Geschichte hatte Theopompos, wie bekannt, eine Geschichte der attischen Politik oder attischen Demagogen gegeben, so dass das Buch oder ein Theil desselben auch mit dem besondern Titel *περὶ δημαγωγῶν* angeführt wird (Athen. 4 p. 166 E. Schol. Lucian. Tim. 29). Vergl. Brückner König Philipp S. 321. C. Müller hist. gr. 1 p. LXXI. Dass er aber auch die früheren ziemlich ausführlich behandelt hatte, zeigen die Bruchstücke, die sich auf Kimon beziehn (ausser dem angeführten noch 92. 93), und die Kleon angehn (99—101). Obgleich nun auch Theophrastos (Cic. de Off. 2 §. 64) und Aristoteles (Plut. Kimon K. 10), wol in den *πολιτεῖαι* (vgl. Rose Aristoteles pseudepigr. p. 421), über die Freigebigkeit Kimons Aehnliches berichtet hatten, so lassen doch die

---

1) Nach *ἀπόρους* steht in den HSS. *προσιόντας,* dass aber dies und das folgende *εἰσιόντας* nicht neben einander bestehen können, ist augenscheinlich. Dindorf findet deshalb *εἰσιόντας,* das im cod. B. fehlt, überflüssig und Meineke hat es eingeklammert. Aber gerade dies scheint durch den Sinn und die Wortstellung gesichert. Vielmehr war wol *προσιόντας* eine Variante zu *εἰσιόντας,* die über der Zeile oder am Rande beigeschrieben war und dann an unrechter Stelle in den Text kam.

gewählten Worte keinen Zweifel, dass Plutarch dem Theopompos folgte. Ebenso auch Cornelius Cim. K. 4 und Heraklides *περὶ πολιτειῶν* p. 5. vgl. Schneidewin p. 39 f. Nur der sowol im Leben des Kimon als des Perikles gebrauchte Ausdruck *τῶν χωρίων τοὺς φραγμοὺς ἀφαιρεῖν*, während Cornelius ganz nach Theopompos *ut nunquam in eis custodem imposuerit fructus servandi gratia* sagt, scheint aus einer anderen Quelle entlehnt zu sein.

In der weiteren Auseinandersetzung Plutarchs lassen sich folgende Punkte unterscheiden: 1. Aufhebung des Areopags und Verbannung Kimons (K. 9), 2. Schlacht bei Tanagra und Zurückberufung Kimons; Kimons Tod (K. 10), 3. Thukydides, des Melesias Sohn, und die im Kampf gegen ihn gesteigerten Bestrebungen des Perikles die Gunst des Volks zu gewinnen, und zwar a. durch Feste, Seezüge und Kleruchien (K. 11), b. durch die grossen Bauten (K. 12. 13. 14), 4. straffe Führung der öffentlichen Angelegenheiten, nachdem auch Thukydides durch das Scherbengericht beseitigt war (K. 15).

Was er zunächst noch in K. 9 über die Vertreibung Kimons sagt, ist so kurz und flüchtig, dass von bestimmten Quellen nicht die Rede sein kann. Er deutet blos kurz an, worauf es ihm hier ankam, während er im Leben des Kimon die Dinge ausführlicher erzählt hatte (*ὡς ἐν τοῖς περὶ ἐκείνου γέγραπται*). Wenn aber, wie Plutarch anführt, Aristoteles die Spenden, welche Perikles dem Volke aus dem Staatsvermögen zukommen liess, auf den Rath des Damonides von Oa[1]) zurückführte, so

---

1) Mit Recht hat Sintenis in der 3. Auflage der weidmannschen Ausgabe *Δαμωνίδου τοῦ Ὄαθεν* nach Stephanos Byz. s. v. *Ὄα* hergestellt, während er früher *Δαμωνίδου τοῦ Οἴηθεν* schrieb und die HSS. *Δημωνίδου τοῦ Οἴηθεν* haben, Stephanos hat *Δάμων Δαμωνίδου Ὄαθεν*, wahrscheinlich, wie Meineke bemerkt, aus einem Psephisma bei Krateros, das er beantragt hatte. Dass éin Damonides gemeint sei, zeigt das Demotikon, ja gar nicht unwahrscheinlich ist Onckens Vermuthung (Athen und Hellas 2 S. 12), dass Rathgeber des Perikles nicht Damonides, sondern Damon der Musiker war, nach dem, was Plutarch K. 4 über ihn sagt (vgl. Hemsterh. zu Ar. Plut. p. 352. Meineke com. gr. 2 p. 683. Volkmann zu Plut. de musica p. 103). Aber mag Aristoteles den Musiker

hatte er ohne Zweifel auch die zufolge dieses Rathes von Perikles getroffenen Einrichtungen angegeben und ebenso wenig wird Theopompos diese im Gegensatz zu Kimon hervorzuheben vergessen haben. Aber mit Rose Aristot. pseudepigr. p. 423 den ganzen Inhalt des Kapitels („quibus brevis inserta Aristotelis notitia") auf Theopompos zurückzuführen, liegt kein Grund vor. Auch die Worte *ἄλλοι δὲ πολλοί* bezicht Rose p. 422 auf Theopompos, aber dabei dachte Plutarch gewiss zunächst an Platons Gorgias p. 515. D ff. Die viel besprochenen Worte über die Wahl der Archonten und den Eintritt derselben in den Areopag, die ich in der Abhandlung de creatione archontum atticorum p. 28 f. erörtert habe, sind ohne Zweifel ein Zusatz Plutarchs selbst[1]): Theopompos und Aristoteles konnten unmöglich glauben, dass für ihre Leser ein solcher Zusatz nöthig oder zweckmässig sei.

Die hierauf folgende Erzählung über die Schlacht von Tanagra (458) und die Rückberufung des Kimon durch Perikles (K. 10) weicht etwas von der im Kimon (K. 17) ab. Hier ist es der Rath der 500, der den Kimon in die Reihen der Kämpfenden aufzunehmen verbietet, im Perikles sind es die Freunde des Perikles, die dies hindern. Da kaum Zeit war einen Beschluss des Rathes zu veranlassen und abzuwarten, so ist das Letztere ohne Zweifel die richtigere Ueberlieferung. Von der gewaltigen Anstrengung des Perikles selbst, wie er rücksichtslos sein Leben aufs Spiel setzte, ist im Kimon gar nicht die Rede, während dort

gemeint und genannt haben, Plutarch dachte nicht an ihn, sonst hätte er ihn ohne Zweifel als den Musiker bezeichnet, auch nicht *Δάμωνος Δαμωνίδου τοῦ Ὄαθεν*, sondern nur *Δ. Δαμ. Ὄαθεν* gesagt. Dagegen mit *Δαμωνίδου τοῦ Ὄαθεν* vergleiche man *Θουκυδίδην τὸν Ἀλωπεκῆθεν* K. 11. In dem Psephisma selbst hiess es nicht *Ὄαθεν*, sondern *HOAΘEN, Ὄαθεν:* vgl. Ross, Demen Attikas p. 34. Keil, Schedae epigr. p. 9. Doppelte Demotika, wie *Ὀαεῖς* und *Ὄαθεν*, kommen bei mehreren Demen vor, so *ἐκ Κολωνοῦ* und *Κολωνῆθεν* für den Demos der Aegeis, *Κεραμεὺς* und *ἐκ Κεραμέων*, *Φλυεὺς* und *Φλυῆθεν*, *Ἀζηνιεὺς* und *Ἀζηνιᾶθεν.*

1) Sollten nicht die Worte *μήτε βασιλεὺς μήτε πολέμαρχος* nach *ἄρχων* umzustellen sein? Die Rangordnung der neun Archonten kannte Plutarch und ein Grund davon abzuweichen liegt nicht vor.

die Angaben über die Gesinnungsgenossen des Kimon sehr ins Einzelne gehn. Dass endlich im Perikles das εὐθὺς fehlt, welches Kimon K. 18 gegen die Wahrheit verstösst, ist eine entschiedene Verbesserung. Da wir nun Theopompos mit Sicherheit vorher als Plutarchs Gewährsmann erkannten, so ist es nicht unwahrscheinlich, dass er ihm auch in diesen noch auf Kimon bezüglichen Ereignissen folgte. Durch die Scholien zu Aristides (3 p. 528 Ddf. = Frg. 92 Müll.) wissen wir wenigstens, dass Theopompos im 10. B. der Philippischen Geschichte der Rückberufung Kimons nach der Schlacht bei Tanagra gedacht und hinzugefügt hatte ὁ δὲ παραγενόμενος τῇ πόλει τὸν πόλεμον κατέλυσε, was Cornelius doch wol auf eigene Gefahr in ähnlicher Weise, wie Plutarch durch die Zusetzung des Adverbiums εὐθύς, durch die Worte *satius existimans contendere Lacedaemonem sua sponte est profectus* verfälscht hat. Ob aber die Abweichungen in den beiden Berichten Plutarchs daher rühren, dass er zu der im Kimon benutzten Quelle noch eine andere Erzählung hinzunahm, oder ob ihm das eine, wie das anderemal dieselben oder derselbe Berich vorlagen und er nur theils das für jeden Ort gerade weniger Gehörige wegliess, theils genauer oder flüchtiger das Gefundene wiedergab, lässt sich nicht ermitteln. So viel ist sicher, dass er Thukydides hier gar nicht einsah. Sonst hätte er den Verdacht, der nach Thukydides (1, 107) die Athener zu ausserordentlichen Anstrengungen auftrieb, dass die Spartaner es auf den Umsturz der demokratischen Verfassung Athens abgesehn hätten und dass sie von Aristokraten in Athen selbst herbeigezogen würden, nicht übergehn können. Mit den ἔνιοι sodann, welche über die Thätigkeit Elpinikes und ihre Vermittlung zwischen Perikles und Kimon berichtet hatten, ist Stesimbrotos gemeint. Das sehn wir aus dem Leben Kimons K. 14. Dort wird für die Verwendung Elpinikes bei Perikles, als dieser bei der Eisangelie gegen Kimon nach dem thasischen Feldzug 465 oder 462 (wie A. Schäfer de rerum post bellum persicum — temporibus p. 17 wol mit Recht annimmt) vom Volke mit zum Synegoros gewählt worden war, ausdrücklich Stesimbrotos angeführt und Plutarch braucht hier wie dort dieselben Worte.

Hieran knüpft Plutarch die Widerlegung einer Nachricht bei Ido-

meneus, dass Perikles von Neid und Eifersucht getrieben heimlich Ephialtes habe tödten lassen. Ich habe früher (Rhein. Mus. 1843 S. 450 ff.) die Vermuthung ausgesprochen, dass diese und ähnliche Nachrichten über attische Staatsmänner, für die bei Plutarch und anderen Schriftstellern Idomeneus als Quelle angegeben wird, auf eine Schrift desselben περὶ δημαγωγῶν zurückgeführt werden müssen. Und nicht nur ist Fritzsche zu Aristoph. Ranae p. 164 auf dieselbe Verbesserung der Stelle in Bekkers anecdota p. 249 gekommen, sondern auch Sintenis und andere haben sie gebilligt. Die Anschuldigung des Perikles ist so widersinnig, dass sie der Widerlegung kaum bedurfte, aber alle Angaben aus dem Buche des Idomeneus, welche Sintenis zu Plut. Pericles (1835) p. 313 ff. zusammengestellt hat, zeigen uns, was für thörichte Erfindungen und Lügen griechische Schriftsteller, namentlich aus der Schule Epikurs und der peripatetischen, aufzuraffen und ihren Lesern vorzutragen sich nicht entblödeten. Wie oft mögen wir durch Geschichten getäuscht werden, die aus denselben Sudelküchen stammen, aber den Stempel der Ungereimtheit oder Lüge weniger deutlich an sich tragen. Erfunden mögen diese Schriftsteller auch bisweilen haben, indem sie für Thatsachen Gründe nach der kleinlichen oder hämischen Gesinnung, die ihnen eigen war, ausdachten. Aber meistens griffen sie wol nur hastig auf, was ihnen zusagte, und wir dürfen die Frage nach dem, was ihren Geschichtchen zum Grunde lag, nicht abweisen. Hier wie bei Pheidias Tod (K. 31) werden wir die Thätigkeit der Aristokraten erkennen dürfen, die, was sie selbst angestiftet, auf den politischen Gegner zu wälzen suchten. Plutarch widerlegt Idomeneus durch das Zeugniss des Aristoteles (Rose p. 423) und wir werden diesem doch wol nicht nur die Nennung des Mörders, Aristodikos von Tanagra, zuschreiben wollen, sondern er musste dabei zugleich erwähnen, wie Aristodikos dazu gekommen sei Ephialtes zu ermorden, von wem und warum er gedungen worden. Es knüpft sich daran die nicht unwichtige Frage, wem wir die günstigen Nachrichten über Ephialtes zu danken haben, die sich bei Plutarch nicht nur hier, sondern auch an einigen anderen Stellen finden, obgleich er selbst die Beeinträchtigung des Areopags durchaus missbilligt. Ephialtes, der Sohn

des Sophonides, ist von der Geschichte sehr ungünstig behandelt worden. Er wird äusserst selten und fast immer nur gelegentlich erwähnt. Wenn auch die Massregeln gegen den Areopag immer zunächst ihm zugeschrieben werden und Hass und Verfolgung, übler Nachruf deshalb ihm besonders zu Theil wurden (Pausan. 1. 29, 15 *Ἐφιάλτης, ὃς τὰ νόμιμα τὰ ἐν Ἀρείῳ πάγῳ μάλιστα ἐλυμήνατο*), so gilt er doch meist dabei nur als der, welcher Perikles Ansichten durchführte (die Stellen bei Sintenis zu Perikles 1835 p. 104 f.). Dass er auch als Feldherr thätig war, erfahren wir nur aus der Bemerkung des Kallisthenes über den kimonischen Frieden bei Plut. Kim. K. 13: *Καίτοι Καλλισθένης οὔ φησι ταῦτα συνθέσθαι τὸν βάρβαρον, ἔργῳ δὲ ποιεῖν διὰ φόβον τῆς ἥττης ἐκείνης καὶ μακρὰν οὕτως ἀποστῆναι τῆς Ἑλλάδος, ὥστε πεντήκοντα ναυσὶ Περικλέα καὶ τριάκοντα μόναις Ἐφιάλτην ἐπέκεινα πλεῦσαι Χελιδονίων καὶ μηδὲν αὐτοῖς ναυτικὸν ἀπαντῆσαι παρὰ τῶν βαρβάρων*[1]). Gelegentlich heisst es Plut. Kim. K. 10: *λημμάτων δὲ δημοσίων τοὺς ἄλλους πλὴν Ἀριστείδου καὶ Ἐφιάλτου πάντας ἀναπιμπλαμένους ὁρῶν* (Kimon) *αὑτὸν ἀδέκαστον — διὰ τέλους παρέσχε*. womit die Aeusserungen des Ephialtes bei Aelian V. H. 11, 9 und 13, 39 übereinstimmen. Thukydides erwähnt seiner gar nicht, das Urtheil des Ephoros, das ohne Zweifel Diodor 11, 77 wiedergiebt, war äusserst ungünstig und herb: *οὐ μὴν ἀθρόως*[2]) *γε διέφυγε τηλικούτοις ἀνομήμασιν ἐπιβαλόμενος, ἀλλὰ τῆς νυκτὸς ἀναιρεθεὶς ἄδηλον ἔσχε τὴν τοῦ βίου τελευτήν*. Dass hingegen Aristoteles wenigstens seine Energie und doch wol auch Unbestechlichkeit (*ἀπαραίτητον*) anerkannte, sehn wir aus Plutarch und auf den Verfasser der *Ὑπόθεσις* zu Isokrates Areopagitikos, nach welchem Aristoteles beiden, Ephialtes und Perikles, Furcht vor eigener Verurtheilung durch den Areopag als Beweggrund ihres Vorgehns gegen den Areopag zugeschrieben hatte (Frg. 22 Rose), werden wir nicht viel geben

1) Es ist ein Versehn von Oncken Athen und Hellas 2 S. 151. 153, dass hier nur von éinem Zuge die Rede sei. Offenbar soll gerade die kleine Zahl der Schiffe, erst 50 mit Perikles, dann gar nur 30 mit Ephialtes, zeigen, welche Furcht die Perser erfüllte und wie sicher sich die Athener wussten.

2) Was dies Wort bedeuten solle, weiss ich nicht. Wahrscheinlich schrieb Diodor *ἀθῷος*.

wollen. Aber es wäre doch möglich, dass Theopompos bei seinem Widerspruchsgeist Ephialtes, den Zurückgesetzten, günstiger beurtheilt und bei der Erzählung des auf Kimon Bezüglichen die Rechtschaffenheit des Ephialtes anerkannt hätte, so wenig auch die Schmälerung des Areopags seinen Beifall hat. In dem Urtheil hierüber war Ephoros und Theopompos ihr Lehrer Isokrates vorangegangen: 7 §. 50 f. Neuerdings hat Oncken Athen und Hellas 1 S. 147 ff. die selbständige Bedeutung des Ephialtes gewiss mit Recht hervorgehoben, aber wieder Perikles etwas zu sehr bei Seite gedrängt. Denn dass die Thätigkeit des Perikles und Ephialtes dabei eine gemeinsame gewesen war, lässt sich den übereinstimmenden Zeugnissen der Alten gegenüber nicht läugnen. Doch es ist hier nicht der Ort näher auf Onckens beredte Darstellung einzugehn. Nur über zwei Stellen, auf welche er ein besonderes Gewicht legt (S. 182 ff.), in aller Kürze eine Bemerkung. Die Worte Plutarchs Per. K. 10 z. E aus Aristoteles versteht er so, dass Ephialtes die Bedrückungen und Ungerechtigkeiten, welche sich die Archonten *als Einzelrichter* gegen den Demos, d. h. also doch wol nur: gegen Einzelne, die nicht zu den Geschlechtern gehörten, gegen Einzelne aus dem Demos, zu Schulden kommen liessen, bei der Rechenschaftsablegung derselben auf das Nachdrücklichste verfolgt habe. Gegen die Herrschaft des Demos als Gesammtheit konnte doch die richterliche Thätigkeit der Archonten nur eine sehr mittelbare Wirkung haben. Aber wir dürfen auch weder Aristoteles noch Plutarch einen so dunklen und gesuchten Gedanken unterschieben, wenn ein anderer nach dem gewöhnlichen attischen Sprachgebrauch nahe liegt. Zu Athen gab es eine *γραφὴ ἀδικίου*, oder *ἐάν τις τὸν τῶν Ἀθηναίων δῆμον ἀδικῇ* (Meier de bonis damn. p. 13 ff. Schömann att. Proc. p. 345 f. Mätzner zu Deinarchos 3 §. 4), wenn Gelder unterschlagen waren, wenn irgend etwas der öffentlichen Wohlfahrt Nachtheiliges geschehn war, und Plutarch kannte diese Klage sehr gut (vgl. K. 32: *εἴτε κλοπῆς καὶ δώρων εἴτ' ἀδικίου βούλοιτό τις ὀνομάζειν τὴν δίωξιν*). So sind wir auch hier nicht berechtigt an andere Klagen, die Ephialtes angestellt habe, zu denken. Dabei gerade trat die Rechtlichkeit des Ephialtes hervor. Die zweite Stelle, in welcher Oncken zu viel zu fin-

den scheint, ist die wunderliche Bemerkung der höchst unzuverlässigen *Δικῶν ὀνόματα* in Bekk. anecd. p. 188, 12: *Ἐφιάλτης: οὗτος ὑβρισθεὶς ἑαυτὸν τῆς βουλῆς ἀπεστέρησε κατακρίνας αὐτήν.* Das soll heissen, Ephialtes habe als Archon durch tadellose Haltung seine Amtsgenossen und Vorgänger beschämt, bei einem in Folge des Aufsichtsrechts des Areopags über die Archonten entstandenen Zusammenstoss mit dem Areopag sei er von diesem verletzt worden, habe dann den Areopag bei der Heliäa belangt und so nach Verurtheilung desselben in dem heliastischen Gerichte sich selbst den Eintritt in ihn verschlossen, indem der Areopag ihn nun nicht aufnahm. Eine solche gerichtliche Belangung und Verurtheilung des Areopags als solchen ist etwas nach den attischen Staatseinrichtungen, so weit sie uns bekannt sind, ganz Unmögliches, am allerwenigsten auf dies vereinzelte, ganz unzuverlässige Zeugniss hin Annehmbares. Die Worte sind wol verdorben und der Urheber wollte oder sollte nach dem, was ihm als Quelle vorlag, schreiben: *Ἐφιάλτης: οὗτος ὑβρισθεὶς ὑπὸ* (oder *ὑβρισάσης αὐτὸν*) *τῆς βουλῆς ἀπεστέρησε πάσας τὰς κρίσεις* (oder nur *ἀπεστέρησε τὰς κρίσεις*) *αὐτήν.* vgl. Plut. Per. 9: *ὥστε τὴν μὲν ἀφαιρεθῆναι τὰς πλείστας κρίσεις δι' Ἐφιάλτου.* Kim. 15: *ἀφείλοντο τῆς ἐξ Ἀρείου πάγου βουλῆς τὰς κρίσεις πλὴν ὀλίγων ἁπάσας.*

Doch kehren wir zu Plutarchs Perikles zurück, wo wir nun zu einem höchst anziehenden, durch den Reichthum und die Eigenthümlichkeit der Mittheilungen bedeutenden Stück kommen, den Kapiteln 11—14, in denen er die Massregeln bespricht, durch welche Perikles dem strafferen Widerstand der Aristokratenpartei unter der Führung des Thukydides gegenüber sich die Anhänglichkeit des Volkes erhalten habe. Es sind das die Veranstaltung von Festlichkeiten, die jährliche Aussendung von 60 Trieren, die Einrichtung von Kleruchien, endlich der Bau grossartiger Kunstwerke, bei denen er am längsten verweilt (K. 12—14). Eine Andeutung, woher er dies Alles genommen habe, ist weder bei Plutarch selbst gegeben noch, so viel ich weiss, sonst irgend wo zu finden. Indessen gleich die Erörterung, dass eigentlich erst die Führung des Thukydides den Gegensatz zweier streng nach politischen Ansichten und Bestrebungen geschiedener Parteien zu Athen hervorgerufen habe,

ist der Art, dass wir darin nicht eine Betrachtung Plutarchs selbst finden können, sondern die unverkennbaren Spuren eines noch dem Leben Athens und jener Zeit näher stehenden Schriftstellers erkennen. Wenn aber Theopompos in dem erwähnten 10. Buche näher auf die bedeutendsten Staatsmänner Athens eingegangen war, und sich über Kimon in der besprochenen Weise ziemlich ausführlich ausgelassen hatte, so dürfen wir wol glauben, dass er auch über Thukydides und das, wodurch am Ende Perikles den Sieg über ihn davongetragen, eine eingehendere Darstellung gegeben habe. Denn dass er nach dem Schol. zu Arist. Vesp. 941 nicht den Sohn des Melesias, sondern einen sonst nirgend genannten Sohn des Pantänos als Gegner des Perikles genannt habe, ist bei einem so bekannten Manne, wie Thukydides, der Sohn des Melesias, es damals, nach etwa 100 Jahren, offenbar noch war, nicht glaublich. Die Scholien zu der Stelle des Aristophanes sind so voll von Verwirrung und Irrthümern, dass wir auch in diesem Punkte ein Versehn des Scholiasten annehmen dürfen. Natürlich aber musste auch Ephoros über denselben Kampf der Parteien sprechen und es kommt mir immer wieder, wenn ich das 11. Kapitel lese, so vor, als seien zwei Berichte von Plutarch verbunden, von denen der eine Perikles günstiger war, der andere ihn mehr in einer auf Volksgunst ausgehenden Thätigkeit, etwa nach Art des Eubulos, erscheinen liess. Denn was von den Worten *ἑξήκοντα δὲ τριήρεις καθ' ἕκαστον ἐνιαυτὸν ἐκπέμπων* — an folgt, unterscheidet sich wesentlich von dem Früheren. Vorher sagt er, dass Perikles immer auf Volksbelustigungen bedacht gewesen sei, und fügt, wahrscheinlich von sich aus, den Vers eines Komikers oder aus Euripides

διαπαιδαγωγῶν οὐκ ἀμούσοις ἡδοναῖς

τὴν πόλιν hinzu: denn wenn auch *διαπαιδαγωγεῖν* ein Lieblingsausdruck Plutarchs ist (vgl. Sintenis 1835 S. 123 f.), so braucht ihn doch auch Platon schon (Tim. 89. D) und in der ganzen Wendung scheint mir eine poetische Färbung unverkennbar zu sein; *διαπαιδαγωγῶν* steht in häufiger Uebertragung etwa für *διαδημαγωγῶν*. Das aber, was folgt, enthält nur zweckmässige und für den Staat heilsame Massregeln, wenn er die Bürger erfahren im Seekampf machte, wenn er durch die Kleruchien,

wie in der vortrefflichen Schlussbemerkung des Kapitels gesagt ist, die müssige und deshalb neuerungssüchtige Menge aus der Stadt entfernte, der Armuth zu Hülfe kam und die auswärtigen Besitzungen des Staates sicherte (Curtius gr. Geschichte 2^2 S. 226 ff.). Vielleicht rührt also die Aufzählung der Kleruchien, die chronologisch scheint, sammt der daran geknüpften Bemerkung aus Ephoros her. Ueber die Aufeinanderfolge habe ich in der Abhandlung über die Inschrift von Brea (Berichte der K. sächs. Ges. d. Wiss. 1853 S. 46 f.) gesprochen. Da die früheste Sendung, welche erwähnt ist, nach der Chersonesos, in das J. 452 fällt, die letzte nach Thurioi in das Jahr 443[1]), so weist auch diese Ausschliessung der später ausgesendeten Kleruchien, nach Amphipolis 437, in die Propontis (432: Diod. 12, 34 [2])), nach Aegina 431 darauf hin, dass wir hier eine Stelle vor uns haben, die sich nur auf die Zeit des Kampfes zwichen Thukydides und Perikles bezog, nicht auf die letzten 15 Jahre, in denen Perikles allein an der Spitze des Staates stand (Perikl. K. 16). Denn wir dürfen wol annehmen, dass nicht plötzlich erst nach Kimons Tode (449) Thukydides an den Staatsgeschäften sich zu betheiligen anfing, sondern dass er schon vorher, während der Abwesenheit Kimons auf Seezügen, Ansehn gewonnen hatte. Und wenn auch Thukydides schon 444 dem Scherbengericht verfiel, so hatte doch die

1) *εἰς Ἰταλίαν οἰκιζομένης Συβάρεως* heisst es in den HSS. Plutarchs. Wahrscheinlich aber schrieb er *ἀνοικιζομένης*, denn er meint, das früher zerstörte, dann wieder aufgebaute, neu gegründete Sybaris sei Thurioi genannt worden. Ich sehe, dass auf diese Vermuthung auch Eberhard observatt. polyb. p. 40 gekommen ist.

2) *ἅμα δὲ τούτοις πραττομένοις ἔκτισαν οἱ Ἀθηναῖοι πόλιν ἐν τῇ Προποντίδι τὴν ὀνομαζομένην Λέτανον.* Dieser Ort, so wie die ganze Nachricht, findet sich nur an dieser Stelle: ob aus Ephoros? Vielleicht ist *Γάνον* für *Λέτανον* zu lesen: über diese Stadt vgl. die Herausg. zu Xen. Anab. 7. 5, 8. Aeschines 3 §. 82. und ausserdem Constant. Porphyrog. in themat. Occid. t. 3 p. 47 Bkk. Hierokles Synecdem. 633, 1. Beide zuletzt erwähnten Schriftsteller nennen vor Ganos einen Ort *Ὄρνοι*. Deshalb ist wahrscheinlich die Vermuthung von Bosius richtig, dass bei Cornelius Alcib. 7 *Ornos* für *Bornos*, welcher Name sonst nirgends vorkommt, zu schreiben sei.

Entsendung einer Kolonie nach Italien schon seit 446 Perikles beschäftigt und der Gewährsmann Plutarchs mag also die erste Sendung nach Sybaris gemeint haben, die in jenes Jahr fiel. Auch das spricht wol für eine bestimmte Vorlage, die Plutarch hier bei seinen genauen Angaben über die Zahlen der nach den einzelnen Orten entsendeten Siedler vor Augen hatte, dass er an andern Stellen, wahrscheinlich nach andern Gewährsmännern, noch mehrere andere nennt, die in den Bereich der hier gemeinten Zeit gehören, so K. 20 nach Sinope, K. 23 nach Hestiäa.

Ich komme zu den Angaben über die Prachtbauten, welche Perikles aufführte, und das gewaltige Leben, welches er dadurch in allen Theilen der Bevölkerung hervorrief. Es zerfällt diese Darstellung, die Perle der ganzen Biographie, in fünf Theile, die Verhandlungen der Parteien darüber (K. 12), Zergliederung der Menge aller dabei Beschäftigten (K. 12), bewundernde Anerkennung ihrer Schönheit und ewigen Jugend (K. 13), über die dabei thätigen Künstler (K. 13), über den Stolz des Volkes sie zu besitzen (K. 14). Sehr merkwürdig ist nun die erste Hälfte des 12. Kapitels, aus der wir erfahren, wie heftige Kämpfe Perikles in der Volksversammlung zu bestehn hatte, um die Beschlüsse über diese Bauten und Kunstwerke durchzusetzen.

Es scheint, als seien hier *Stücke aus den damals gehaltenen Reden erhalten*. Die Einwürfe der Gegner werden so angegeben: *τοῦτο (τὴν τῶν ἀναθημάτων κατασκευὴν) μάλιστα τῶν πολιτευμάτων τοῦ Περικλέους ἐβάσκαινον οἱ ἐχθροὶ καὶ διέβαλλον ἐν ταῖς ἐκκλησίαις βοῶντες, ὡς ὁ μὲν δῆμος ἀδοξεῖ καὶ κακῶς ἀκούει τὰ κοινὰ τῶν Ἑλλήνων χρήματα πρὸς αὑτὸν ἐκ Δήλου μεταγαγών, ἣ δ' ἔνεστιν αὐτῷ πρὸς τοὺς ἐγκαλοῦντας εὐπρεπεστάτη τῶν προφάσεων, δείσαντα τοὺς βαρβάρους ἐκεῖθεν ἀνελέσθαι καὶ φυλάττειν ἐν ὀχυρῷ τὰ κοινά, ταύτην ἀνῄρηκε Περικλῆς, καὶ δοκεῖ δεινὴν ὕβριν ἡ Ἑλλὰς ὑβρίζεσθαι καὶ τυραννεῖσθαι περιφανῶς, ὁρῶσα τοῖς εἰσφερομένοις ὑπ' αὐτῆς ἀναγκαίως πρὸς τὸν πόλεμον ἡμᾶς τὴν πόλιν καταχρυσοῦντας καὶ καλλωπίζοντας ὥσπερ ἀλαζόνα γυναῖκα περιαπτομένην λίθους πολυτελεῖς καὶ ἀγάλματα καὶ ναοὺς χιλιοταλάντους.* Sonderbarer Weise hat man hier nicht bemerkt, dass das Pronomen *ἡμᾶς* das Vorausgehende und Folgende alles als nicht nur dem Inhalte, sondern auch der Form nach einer Rede, die vor dem

Volke gehalten wurde, entnommen bezeichnet. Gleich der Anfang *ὡς ὁ μὲν δῆμος ἀδοξεῖ* setzt so ein, wie sonst direkte Rede mit einem *ὡς* oder *ὅτι* an das vorangehende Verbum des Sagens angeschlossen wird. Dass Plutarch aber selbst dasjenige, was er in seinen Quellen als Gegenstand der Vorwürfe gefunden, welche die politischen Gegner des Perikles, wie Thukydides, des Melesias Sohn, ihm machten, so in die Form einer damals gesprochenen Rede gebracht habe, ist ganz gegen die Gewohnheit desselben.

Ebenso trägt das Folgende, das als Entgegnung des Perikles gegeben ist, vollkommen den Charakter einer wirklichen Rede: *ἐδίδασκεν οὖν ὁ Περικλῆς τὸν δῆμον, ὅτι χρημάτων μὲν οὐκ ὀφείλουσι τοῖς συμμάχοις λόγον προπολεμοῦντες αὐτῶν καὶ τοὺς βαρβάρους ἀνείργοντες, οὐχ ἵππον, οὐ ναῦν, οὐχ ὁπλίτην, ἀλλὰ χρήματα μόνον τελούντων, ἃ τῶν διδόντων οὐκ ἔστιν, ἀλλὰ τῶν λαμβανόντων, ἂν παρέχωσιν, ἀνθ' οὗ λαμβάνουσι· δεῖ δὲ τῆς πόλεως κατεσκευασμένης ἱκανῶς τοῖς ἀναγκαίοις πρὸς τὸν πόλεμον εἰς ταῦτα τὴν εὐπορίαν τρέπειν αὐτῆς, ἀφ' ὧν δόξα μὲν γενομένων ἀίδιος, εὐπορία δὲ γινομένων ἑτοίμη παρέσται, παντοδαπῆς ἐργασίας φανείσης καὶ ποικίλων χρειῶν, αἳ πᾶσαν μὲν τέχνην ἐγείρουσαι, πᾶσαν δὲ χεῖρα κινοῦσαι σχεδὸν ὅλην ποιοῦσιν ἔμμισθον τὴν πόλιν ἐξ αὑτῆς ἅμα κοσμουμένην καὶ τρεφομένην.* Zu diesen Worten verhält sich, was sich daran anschliesst, über die Verwirklichung dieses Gedankens des Perikles, wie die Erklärung zum Texte.

Es fragt sich nun, was sind das für Reden, welche Plutarch zur Hand waren. Nach K. 8 *ἔγγραφον μὲν οὖν οὐδὲν ἀπολέλοιπε πλὴν τῶν ψηφισμάτων* war Plutarch nichts von Perikles Aufgezeichnetes und Hinterlassenes vor Augen gekommen. Und es gab auch in der That nie etwas der Art: die Schriften, d. h. die Reden, welche Cicero de Orat. 2 §. 93: *antiquissimi fere sunt, quorum quidem scripta constant, Pericles atque Alcibiades* und mit einigem Zweifel Brut. §. 27: *tamen ante Periclem, cujus scripta quaedam feruntur, — littera nulla est* anführt, waren Machwerke der Rhetorenschulen, wie schon Quintil. 3. 1, 12 mit vollem Recht urtheilte. Wollte man aber auch hier bei Plutarch an eine solche untergeschobene Rede denken, so stände dem die angeführte Aeusserung aus K. 8 entgegen. Dann würde auch Plutarch, wenn ihm solche Reden vorgele-

gen hätten oder er solche vor sich zu haben geglaubt hätte, dies wol angegeben haben. So führt er z. B Alkib. 3 *Ἀντιφῶντος λοιδορίαι* an, so Alkib. 13 [1]): *φέρεται δὲ καὶ λόγος τις κατ' Ἀλκιβιάδου καὶ Φαίακος γεγραμμένος, ἐν ᾧ μετὰ τῶν ἄλλων γέγραπται καὶ ὅτι* —, aus welcher Rede wahrscheinlich auch dort K. 8. 12. 36 Einiges entlehnt ist.

Wenn es also unwahrscheinlich ist, dass Plutarch die damals wirklich gehaltenen Reden selbst vor sich hatte, so bleiben, wie ich glaube, nur zwei Möglichkeiten, die erörterte Beschaffenheit dessen, was Plutarch giebt, zu erklären. Die eine ist, dass er bei einem Geschichtschreiber nach der Sitte der Griechen Reden fand, die damals Thukydides und Perikles gehalten haben sollten. Und von Ephoros und Theopompos sagt Plutarch *πολιτικὰ παραγγέλματα* p. 803. B: *ἐπὶ δὲ τῶν Ἐφόρου καὶ Θεοπόμπου καὶ Ἀναξιμένους ῥητορειῶν καὶ περιόδων, ἃς περαίνουσιν ἐξοπλίσαντες τὰ στρατεύματα καὶ παρατάξαντες, ἔστιν εἰπεῖν 'Οὐδεὶς σιδήρου ταῦτα μωραίνει πέλας.'* Auch ist es nicht glaublich, dass diese Reden blos vor Beginn der Schlachten eingelegt gewesen seien. Indessen ist es doch durchaus unvereinbar mit der Beschaffenheit des 10. Buches des Theopompos, dass er in dieser doch immer episodisch gehaltenen Uebersicht nicht eigentlich zum Gegenstand seines Werkes gehöriger Zeiten habe Reden halten lassen. Für Ephoros fällt dieser Grund weg, aber die Wärme, mit der Perikles seine Pläne vertheidigt und empfielt, die Fülle und Lebendigkeit des Ausdrucks, die sich zu dichterischer Färbung steigernde Eigenthümlichkeit [2]) der Reden, um hier noch von dem Hauche be-

---

1) In diesem Kapitel heisst es nachher *ὡς δ' ἔνιοί φασιν, οὐ πρὸς Νικίαν, ἀλλὰ πρὸς Φαίακα διαλεχθεὶς καὶ τὴν ἐκείνου προσλαβὼν ἑταιρίαν ἐξήλασε τὸν Ὑπέρβολον οὐδ' ἂν προσδοκήσαντα.* Das ist nicht grammatisch richtig: nicht *Hyperbolos hätte es nicht erwartet*, sondern *hatte es nicht erwartet, hatte gar nicht das als möglich gedacht* muss es heissen, also: *οὐ δὴ προσδοκήσαντα.*

2) Die Worte *ὥσπερ ἀλαζόνα γυναῖκα* (denn dies ist mit dem Folgenden zusammenzunehmen) *περιαπτομένην λίθους πολυτελεῖς καὶ ἀγάλματα καὶ ναοὺς χιλιοταλάντους* klingen fast, als wären sie in Erinnerung an einen Tetrameter iambicus eines Komikers geschrieben, etwa:

περιάπτεται δ' ἀγάλματα καὶ ναοὺς χιλιοταλάντους.

geisterter Theilnahme und Unmittelbarkeit, der uns in dem zweiten Theile des Kapitels warm entgegenweht, gar nicht zu sprechen, stimmen mit der sonst bekannten Weise des Ephoros nicht zusammen.

Die andere Möglichkeit — denn für Stesimbrotos und Idomeneus sind die Sachen viel zu gut — ist nach meiner Ansicht die, dass wir hier Mittheilungen aus den *Ἐπιδημίαι* des Ion von Chios vor uns haben. Diese *Reisen Ions* waren Mittheilungen über das auf seinen Wanderungen Erlebte, über die Männer, welche er an den verschiedenen Orten kennen lernte, wie dies Köpke, der sie zuletzt am besten und ausführlichsten besprochen, de hypomnematis graecis 2 (Brandenburgi. 1863) p. 2 ff., gegen Schneidewin und Andere nachgewiesen hat. Vgl. E. Curtius Gr. G. 2 S. 243 ff. Nur ein anderer Name für dieselbe Schrift war *Ὑπομνήματα* (Schol. zu Aristoph. Fried. 835), wie schon vor Köpke Bernhardy Gr. Lit. Gesch. 2, 2 S. 49 gesehn hatte. Wie reichhaltig seine Sammlungen waren, sehn wir sowol aus dem, was alles über Kimon daraus bei Köpke zusammengestellt ist, als aus den Angaben über Aeschylos, die Schneidewin (Philol. 8 S. 732 ff.) mit grosser Wahrscheinlichkeit ihm zugewiesen hat. Ohne Zweifel gehört ihm von dem, was über jene Zeiten, die er selbst erlebte, auf uns gekommen ist, viel mehr an, als mit ausdrücklicher Nennung seines Namens überliefert wird. Dass er auch des Perikles gedacht hatte, wäre bei der Bedeutung des Mannes für Athen selbstverständlich und durch die sicher bezeugten ausführlichen Angaben über Kimon hinlänglich angezeigt, wenn auch nicht die ausdrücklichen Anführungen (Perikl. K. 5. 28) vorhanden wären. Man hat freilich gerade aus diesen Stellen schliessen wollen, dass Ion für Kimon gegen Perikles Partei genommen und über Perikles ungünstig geurtheilt habe. Indessen ist in den Worten K. 28 *θαυμαστὸν δὲ*

Die Komiker, welche sich zum Theil sehr bitter über Perikles Thätigkeit ergingen (vgl. die Zusammenstellung bei Cobet observatt. critt. in Platonis comici reliquias p. 5 ff.) werden die prahlerisch und übermässig erscheinenden Anträge des Perikles nicht zu erwähnen und zu verspotten unterlassen haben. Es ist sehr wol möglich, dass die Kosten für den Parthenon mit 1000 Talenten veranschlagt waren (Leake Topogr. Athens p. 461² ff.)

τι καὶ μέγα φρονῆσαι καταπολεμήσαντα τοὺς Σαμίους φησὶν αὐτὸν ὁ Ἴων, ὡς τοῦ μὲν Ἀγαμέμνονος ἔτεσι δέκα βάρβαρον πόλιν, αὐτοῦ δὲ μησὶν ἐννέα τοὺς πρώτους καὶ δυνατωτάτους Ἰώνων ἑλόντος gar nichts Tadelndes enthalten. Und in der ersten Stelle (K. 5) vermisst zwar Ion in dem Wesen des Perikles jene liebenswürdige Freundlichkeit, jene Theilname an gesellschaftlichem Scherz und Frohsinn, die Kimon auszeichneten [1]), und findet in seinem unveränderlichen Ernst und der jede freundschaftliche Annäherung und gesellige Gemeinschaft abweisenden Feierlichkeit etwas Gemachtes und stolze Geringschätzung gegen Andere, das verträgt sich aber mit Bewunderung sehr wohl, wenn sie auch etwas widerwillig sein mag. Scheue Bewunderung mochte in der That überhaupt das Gefühl sein, welches Perikles seinen Zeitgenossen, so viel ihrer ihn nicht hassten, abzwang. Dass Ion, der Dichter, der für alles Schöne leicht empfängliche, nicht ohne die regste Theilnahme, nicht ohne Bewunderung die unvergleichlichen Kunstwerke emporblühn sehn konnte, welche Perikles schuf, dürfen wir ohne Bedenken annehmen. Wenn er auch sich persönlich von Kimon viel mehr angezogen fühlte und als Aristokrat von Chios die ganze Richtung der perikleischen Politik bedenklich finden mochte, so konnte dies ihn doch nicht bestimmen alles Grosse und Merkwürdige, was er während seines Aufenthalts in Athen von dem Wirken des Perikles gesehn, gehört und erlebt hatte, seinem Reisewerk entgehn zu lassen. Aehnlich aber, wie wir annehmen, dass Ion hier Reden des Thukydides und Perikles, oder vielmehr die Hauptgedanken daraus aufgemerkt gehabt habe, so berichtet Plutarch Kim. 16 aus der Volksversammlung, in welcher über das Gesuch der Spartaner um Hülfe gegen die Heiloten und Messenier verhandelt wurde, nach Ion, wodurch Kimon zumeist in seiner Rede die Athener bestimmt habe die erbetene Hülfe zu gewähren: *ὁ δ' Ἴων ἀπομνημονεύει καὶ τὸν λόγον, ᾧ μάλιστα τοὺς Ἀθηναίους ἐκίνησε παρακαλῶν μήτε τὴν Ἑλλάδα χωλὴν μήτε τὴν πόλιν ἑτ-*

1) Die Stelle Plut. Kim. 9 hat Köpke a. a. O. p. 5 nicht genau im Gedächtniss gehabt. Von Perikles ist dort gar nicht die Rede, sondern von Themistokles und eine Aeusserung von diesem über das, was ér verstehe (= Themist. K. 2), nicht des Kimon über *seine* Leistungen wird angeführt.

ῥόζυγα περιιδεῖν γεγενημένην. Dass endlich Plutarch nicht Ion als seinen Gewährsmann in diesem ganzen Kapitel genannt hat, entspricht der schon wiederholt berührten Gewohnheit desselben, gerade die Quelle, welcher er beistimmend folgt, nicht zu nennen, sondern meistens nur dann eine Schrift oder einen Schriftsteller ausdrücklich anzuführen, wenn er aus ihm eine einzelne in den allgemeinen Bericht eingeschobene Notiz entnommen hat oder die Angabe als vereinzelt, als unrichtig bezeichnen will.

Wie wenig sicher meine Vermuthung sei, dass die Angaben des K. 12 aus Ion stammen, seh' ich selbst am besten ein, indessen scheint mir doch so viel gewiss, dass wir in dem ersten Theile Mittheilungen aus den Reden haben, die damals in den Volksversammlungen zu Athen gehalten wurden, als Perikles seinen grossartigen Plan einbrachte, eine Reihe gewaltiger Bauten zur Ehre der Götter und zum Schmuck der Stadt zu errichten, mit Geldern, die dem Bundesschatz auf der Burg entnommen würden. Ich habe in dem kleinen Aufsatz: Sophokleische Inschriften (Nachr. der gött. Ges. d. Wiss. 1865 S. 247 ff.) die Vermuthung zu begründen versucht, dass die Epoche der Inschrift Boeckhs Staatsh. d. Athener 2 S. 340 und 590 ff. (= Rangabé antiqu. hellen. 114), 447/6 v. Chr., den Beginn der grossen Bauten bezeichne, indem der Plan für sie alle als ein Ganzes eingebracht worden sei und das Volk den Rath der 500 mit der Oberaufsicht über den Bau und die Geldverwendungen beauftragt habe. Viel später oder früher können die Bauten nicht begonnen haben. Denn das Odeion ist nach allem, was sich ermitteln lässt, zuerst gebaut worden und war, wie die Verse des Kratinos bei Plutarch K. 13 zeigen, fertig, als Thukydides dem Scherbengericht verfiel, d. h. im J. 444. Also ein paar Jahre vor 444 muss der Beschluss jene Bauten zu errichten gefasst sein, obgleich die Versuche der Gegner das Begonnene zu verdächtigen und so zu hemmen fortgegangen sein mögen (Curtius Gr. Gesch. 2^2 S. 752), worauf sich die Anekdote K. 14 beziehn mag. Dieselben Verse aber (K. 13)

ὁ σχινοκέφαλος Ζεὺς ὁδὶ προσέρχεται
ὁ Περικλέης τᾠδεῖον ἐπὶ τοῦ κρανίου
ἔχων, ἐπειδὴ τοὔστρακον παροίχεται

würden ohne Spitze sein, wenn nicht ein vor kurzem vollendetes und durch seine sonderbare und neue Form Aufsehn erregendes Gebäude erwähnt würde. Man kann also auch nicht mit Oncken Athen und Hellas 1 S. 294 das in der von Ulrich Köhler entdeckten, von mir a.a.O. besprochenen, jetzt in den Berichten der K. preuss. Ak. d. Wiss. 1865 S. 209 ff. von Köhler herausgegebenen Inschrift als Beginn einer Rechnungsperiode bezeichnete Jahr 454/3 als dasjenige ansehn, in welchem der perikleische Gedanke den Bundesschatz auf die Pflege der Kunst zu verwenden zur Ausführung gekommen sei. Denn dass man von 454/3 bis kurz vor 444 an dem Odeum gebaut habe, daran wird man nicht denken wollen. Dass freilich auch meine Vermuthung nichts als eine unsichere Vermuthung sei, weiss ich sehr wohl; aber über grössere oder geringere Wahrscheinlichkeit kommen wir, bis sich etwa ein glücklicher Inschriftenfund ins Mittel schlägt, in diesen Dingen nicht hinaus.

Doch gehn wir weiter in der Geschichte des Kampfes zwischen Thukydides und Perikles. K. 13 enthält zuerst eine begeisterte Anerkennung der perikleischen Werke, die obgleich in ausserordentlich kurzer Zeit vollendet doch alles Frühere und Spätere übertreffen und in ewiger Jugendfrische prangen. Wir haben keinen Grund zu zweifeln, dass dies die eigenen Gedanken Plutarchs sind. Dann folgen §. 3 Angaben über die Künstler, welche bei den einzelnen Werken thätig waren, namentlich über Pheidias. Man könnte meinen, dass sie aus Philochoros entlehnt seien, der im 4. Buche (vgl. Bruchst. 97. 98 Müller) über den Parthenon und die Propyläen, also wahrscheinlich auch über die andern Bauten, gesprochen hatte. Allein Philochoros liess Pheidias in Elis sterben, eine Angabe, die sich neuerdings auch bei dem Verfasser der *Τέχνη τοῦ πολιτικοῦ λόγου* (Notice du MS. grec de la bibl. royale portant le Nro. 1874. Par M. Séguier. Paris, 1840. p. 57. vgl. p. 63 ff. = Spengels rhet. gr. 1 p. 455, 14) gefunden hat, während Plutarch K. 31 sagt, dass er zu Athen im Gefängniss geendet habe. Also werden wir an irgend eines der Werke über die Akropolis oder überhaupt über die Kunstwerke von Athen denken müssen, wie von Heliodoros, Menekles oder Kallikrates, Diodoros und Anderen (vgl. Preller Polemon. fragm. p. 210 sqq.).

Die Anekdote von der Rettung des verunglückten Arbeiters mag ebendaher sein, da sie mit der Bildsäule der Hygieia Athena unmittelbar zusammenhängt. Endlich mag die Aeusserung des Perikles, die K. 14 erwähnt ist, wieder aus Ion sein; eben so gut aber kann sie bei ihrer sehr bedenklichen Haltung auch Stesimbrotos gehören.

So sind wir bis zum Schlusse dieser Erzählung über den Kampf der beiden Parteien unter Thukydides und Perikles gekommen und nur noch das eine bemerke ich, dass Plutarch dies ganze Stück von K. 11 bis K. 14 ausdrücklich durch die Schlussworte als ein in sich zusammenhängendes Ganze bezeichnet: *τέλος δὲ πρὸς τὸν Θουκυδίδην εἰς ἀγῶνα περὶ τοῦ ὀστράκου καταστὰς καὶ διακινδυνεύσας ἐκεῖνον μὲν ἐξέβαλε, κατέλυσε δὲ τὴν ἀντιτεταγμένην ἑταιρείαν.* Dadurch wird die Vermuthung von Bursian beseitigt, der im Rhein. Mus. 10 S. 477 meint, dass Thukydides die K. 12 erwähnten Vorwürfe dem Perikles auch nach der Rückkehr aus der, wie es allerdings scheint, kurzen Verbannung gemacht haben könne. Auch setzte nach der Rückkehr Thukydides schwerlich seinen Parteikampf gegen Perikles fort. Die Bauten alle aber, die ja freilich zum grössern Theil erst nach Thukydides Entfernung ausgeführt wurden, konnte Plutarch doch hier erwähnen, weil sie nach meiner Vermuthung einem zusammenhängenden, von Perikles im Ganzen vorgelegten Plane angehörten. Und für diese Ansicht führe ich noch das an, dass Plutarch eine grosse Menge von andern Bauten und Kunstwerken, welche der Zeit und alle ohne Zweifel der Anregung des Perikles ihre Entstehung verdankten, wie sie E. Curtius Gr. G. 2 S. 283 ff. in trefflicher Uebersicht aufzählt, weder hier noch an anderer Stelle erwähnt. Er führt eben nur die auf, welche zu dem von Thukydides bekämpften Gesetzesvorschlag des Perikles gehörten, und über diesen lagen ihm treffliche und ausführliche Nachrichten in Ions Aufzeichnungen vor.

Die ganze Auseinandersetzung über die politische Entwicklung des Perikles schliesst K. 15 mit einer erklärenden Ausführung der thukydideischen Worte: *ἐγίγνετο δὲ λόγῳ μὲν δημοκρατία, ἔργῳ δ' ὑπὸ τοῦ πρώτου ἀνδρὸς ἀρχή* (2, 65) und greift so in den Anfang von K. 9 zurück. Die Gedanken, die er in etwas breiter, aber eleganter Fassung für diese

Erklärung benutzt, sind, wie er für den letzten selbst sagt und für die andern schon von Sintenis bemerkt ist, aus demselben Kapitel des Thukydides (2, 65) genommen. Nur, was er am Schluss hinzufügt, rührt aus einer andern Quelle her, die sich nicht bestimmen lässt: *γενόμενος*[1]) *καὶ δυνάμει πολλῶν βασιλέων καὶ τυράννων ὑπέρτερος, ὧν ἔνιοι καὶ ἐπὶ τοῖς υἱέσι διέθεντο, ἐκεῖνος μιᾷ δραχμῇ μείζονα τὴν οὐσίαν οὐκ ἐποίησεν ἧς ὁ πατὴρ αὐτῷ κατέλιπεν.* Nach den wunderlichen Erklärungen Xylanders, Schäfers und Anderer halten Emperius opusc. p. 222 und Sintenis die Stelle mit Recht für verdorben. Plutarch hat wahrscheinlich geschrieben *ὧν ἔνιοι καὶ ἐπὶ τοῖς υἱέσι διέθεντο* τοῖς ἐκείνου, *μιᾷ* — —, wodurch zugleich der nicht plutarchische Hiatus gehoben wird. Also diese Könige und Fürsten waren zum Theil dem Perikles so zugethan, dass sie seine Söhne zu Erben einsetzten, dennoch benutzte er die Ergebenheit derselben nicht, um sich zu bereichern. Ob freilich an dieser Angabe etwas wahres ist, lässt sich nicht ermitteln.

Nachdem ich so die Stücke K. 24—28 vom samischen Kriege, K. 31. 32 von den Ursachen des peloponnesischen Kriegs, K. 9—15 von der inneren politischen Entwicklung des Perikles, in denen sich das Verfahren Plutarchs deutlicher erkennen zu lassen schien, ausführlich besprochen habe, will ich über die übrigen Theile der Lebensbeschreibung nur noch wenige Bemerkungen hinzufügen. Die Grundzüge für die einfachen Nachrichten über Eltern, Gestalt, Lehrer, Charakter, politische Richtung und Beredsamkeit des Perikles fand Plutarch ohne Zweifel bei Theopompos; einzelne Züge, Anekdoten und Aeusserungen, wie über den Traum der Agariste (auch bei Herodot 6, 131), die sonderbare Form des Kopfes und die Darstellungen desselben mit dem Helme[2]), das Heimleuchtenlassen des Schmähsüchtigen, den einhörnigen Widder, das Hochzeitmal des Euryptolemos, die witzige Aeusserung des Thukydides über

1) In den unmittelbar vorausgehenden Worten *καὶ τὴν πόλιν ἐκ μεγάλης μεγίστην καὶ πλουσιωτάτην ποιήσας* ist wol vor *πλουσιωτάτην* ausgefallen *ἐκ πλουσίας*.

2) Die richtige Erklärung, dass man ihn bildete, wie man ihn als Strategen immer zu sehn gewohnt war, hat der falschen bei Plutarch zuerst E. Curtius entgegengestellt: Archaeol. Z. 1860, 40.

Perikles Beredsamkeit, einzelne Wendungen aus seinen Reden mochten Stesimbrotos, Ion und Idomeneus liefern, wie er Stesimbrotos K. 8, Ion K. 4, Kritolaos K. 7 namentlich anführt. Eigene Sammlungen gaben ihm die Stellen der Komiker Kratinos, Telekleides [1]), Eupolis, Platon, Aristophanes an die Hand. Die Abhängigkeit von den verschiedenen Stellen, die er gerade vor sich hat, tritt zweimal in diesen Kapiteln hervor. K. 5 z. E. vertheidigt er nach einer Aeusserung des Zenon, doch wol des Eleaten, mit dem Perikles nach K. 4 verkehrte (gegen 450 war Zenon in Athen: Zeller Gesch. d. griech. Philos. 1 S. 420), den feierlichen Ernst (*τὸ σεμνὸν*) des Perikles gegen die ungünstige Beurtheilung Ions, K. 7 §. 3 dagegen setzt er das Gemachte und Absichtliche in Perikles Haltung dem unbefangenen Sichgehenlassen wahrer Tugend entgegen. Sodann legt er für seine Bemerkungen über den Einfluss des Anaxagoras auf die Beredsamkeit des Perikles K. 8 ganz die Stelle Platons Phaedr. 270. A zu Grunde [2]), während er früher schon (K. 4. 5. 6) in etwas abweichender Weise über die Einwirkung des Umgangs mit Anaxagoras und seiner Lehre auf die ganze Entwicklung des Perikles offenbar nach anderen Quellen gesprochen hatte.

Für die Ereignisse aus dem Leben des Perikles, die K. 16—23 erzählt werden, sind, wie wir noch jetzt uns durch Vergleichung überzeugen können, Thukydides und Ephoros, als dessen Auszug Diodor gelten darf, die Führer gewesen. Die einzelnen Stellen giebt Sintenis. Für Ephoros liegt noch ein ausdrückliches Zeugniss in dem vor, was der Schol. zu Aristoph. Wolken 855 (Frg. 118 Müll.) über die Bestrafung des Kleandridas und Pleistoanax, verglichen mit Kap. 22, erzählt. Wahrscheinlich dürfen wir auf Ephoros Rechnung auch die höchst wichtige, jetzt nur bei Plutarch vorhandene Nachricht (K. 17), dass Perikles den Amphiktionenbund unter Athens Führung neu zu gestalten versucht habe, und die Mittheilung über den pontischen Feldzug (K. 20), die

1) Ueber die Verse des Telekleides K. 3 habe ich im Philologus 20 S. 174 ff. ausführlich gesprochen.

2) Auch die Worte *καὶ τὸ πρόσφορον ἑλκύσας ἐπὶ τὴν τῶν λόγων τέχνην* sind aus Platon.

ebenfalls nur bei Plutarch erhalten ist, setzen. Ob aber das, was K. 16 über die Verwaltung des Vermögens und Hauswesens durch den Haushofmeister Euangelos erzählt wird, auf Theopompos oder Stesimbrotos zurückgehe, lässt sich nicht bestimmen.

Auch für die K. 29. 30, über die kerkyräischen Händel, die Klagen der Korinthier, Megareer und Aegineten in Sparta, den Abfall Potidäas, die Verhandlungen über das megarische Psephisma, hat Sintenis die genaue Uebereinstimmung mit Thukydides nachgewiesen, nur dass dieser Perikles dabei nicht nennt. Dessen persönliche Wirksamkeit wird von Ephoros erwähnt gewesen sein. Dass die thörichte Anschuldigung des Perikles, als ob er Lakedaemonios, Kimons Sohn, aus Hohn und um ihm zu schaden nur mit 10 Schiffen den Kerkyräern zu Hülfe geschickt habe, aus Stesimbrotos sei, zeigt Kimon K. 16[1]. Woher die Nachricht sei, dass die Megareer die Ermordung des Anthemokritos leugneten und den läppischen Grund für den Zorn Aspasias und des Perikles aus Aristophanes Acharn. 524 ff. anführten, ist unbekannt: würdig des Stesimbrotos oder Idomeneus ist sie.

Endlich ist auch für die Ereignisse des peloponnesischen Krieges, K. 33—37, Thukydides, selbst bis zur Beibehaltung einzelner Gedanken und Wendungen, besonders aus den Reden, der Führer Plutarchs gewesen. Nur hat die Stelle des Hermippos K. 33 den Zusatz über Kleon veranlasst. Ferner kommt die falsche Angabe, dass die Sonnenfinsterniss 430 gewesen sei (K. 35), während sie Thukydides richtig 431 ansetzt (2, 28. den 3. Aug. 431: vgl. Ullrich, Beiträge zur Erklärung des Thukyd. S. 182. Zech, astron. Untersuchungen über die wichtigeren Finsternisse, welche von den Schriftstellern d. klass. Alt. erwähnt werden S. 5. 30. 44, wo 430 auf S. 30 nur Druckfehler ist) wahrscheinlich nur auf Rechnung Plutarchs. Woher aber die Anekdote stamme, wie Perikles dabei seinen Steuermann zu beruhigen gesucht habe, bleibt ungewiss, oder weisen die Worte ταῦτα μὲν οὖν ἐν ταῖς σχολαῖς λέγεται τῶν φιλοσόφων

1) Den richtigen Grund für Perikles Anordnungen giebt E. Curtius Gr. G. 2² S. 318. 753.

auf Theophrast hin, aus dessen Ethischen Büchern K. 38 eine längere Stelle genommen ist? Die Höhe der Geldsumme, um welche Perikles 429 gestraft wurde, hat Thukydides 2, 65 nicht; Plutarch haben also ausser Thukydides noch mehrere andere Berichte zur Vergleichung vorgelegen, da nach K. 35 z. E. die Angaben zwischen 15 und 50 Talenten schwankten. Für die verschiedenen Namen der Kläger gegen Perikles sind die Gewährsmänner Idomeneus, Theophrastos und Herakleides genannt, aber auf keinen legt Plutarch besonderes Gewicht. Für das häusliche Leid, das Perikles traf (K. 36), werden wir kaum nach einer anderen Quelle zu suchen brauchen, als dem von Plutarch §. 3 selbst genannten Stesimbrotos[1]). Ueber die Art, wie Perikles den Tod seines zweiten Sohnes Paralos ertragen habe, hatte Plutarch früher die ganz entgegengesetzte Erzählung des Protagoras für wahr gehalten (consol. ad Apollon. p. 118. E). Woher endlich K. 37 der Bericht von der Aufhebung des Gesetzes über die *νόθοι* (Curtius Gr. G. 2[2] S. 364) stamme, lässt sich nicht ermitteln. Vielleicht hatte Ephoros eine Angabe darüber; dass die Erzählung über das früher auf Perikles Antrag gegebene Gesetz und die in Folge davon eingetretene Streichung und Verurtheilung vieler

---

1) Zu Anfang von K. 36 heisst es *τὰ δ' οἰκεῖα μοχθηρῶς εἶχεν αὐτῷ κατά τε τὸν λοιμὸν οὐκ ὀλίγους ἀποβαλόντι τῶν ἐπιτηδείων καὶ στάσει διατεταραγμένῳ πόρρωθεν.* So Sintenis nach Reiske, während die HSS. *διατεταραγμένων* haben. Eines passt so wenig, als das andere. Nicht Perikles kann *διατεταραγμένος* genannt werden, sondern die *οἰκεῖα* sind es. Also *διατεταραγμένα.* — Dann ist §. 2 der Fehler *τοὺς λόγους οὓς ἐποίει μετὰ τῶν σοφιστῶν* zu verbessern und mit F[a] *ἐποιεῖτο* zu schreiben. Vgl. K. 38. Dann haben die HSS. *πεντάθλου γὰρ ἵππον ἀκοντίῳ πατάξαντος Ἐπιτιμίου τοῦ Φαρσαλίου ἀκουσίως καὶ κατακτείναντος,* nur F[a] hat, was von Sintenis aufgenommen ist, *πεντάθλου γάρ τινος ἀκ. π. Ἐπίτιμον τὸν Φαρσάλιον ἀκ. κ. κ.* Das ist doch wol nur, wie es auch Sintenis nicht befriedigt, geschickte Vermuthung. Keils Vermuthungen *γὰρ Χαρίππου* oder *γὰρ Ἵππωνος* schliessen sich immer erst an diese, Lesart von F[a] an und die eine giebt einen Hiatus, die andre weicht in wenig wahrscheinlicher Weise von der Lesart der HSS. ab. Sollte nicht vielmehr *Πένταθλον γὰρ Χάριππον ἀκοντίῳ πατάξαντος ἀκουσίως Ἐπιτίμου τοῦ Φαρσαλίου καὶ κατακτείναντος* zu schreiben sein?

Bürger[1]) auf Philochoros hinweise (Frg. 90 Müller), hat schon Sintenis erinnert. Für die Erzählung in K. 38 endlich hat Plutarch seinen Gewährsmann, Theophrastos, selbst genannt.

So haben wir gesehn, dass Plutarch bei der Ausarbeitung dieser Biographie eine reiche Fülle von Quellen vor sich hatte, von der trefflichsten und wieder andere von äusserst verdächtiger Beschaffenheit. Er gab sich Mühe nicht blos die Ereignisse äusserlich an einander zu reihen, sondern der Grösse des Mannes durch sorgfältige Erörterung seiner Absichten und Gesinnungen gerecht zu werden. Aber theils die Kleinheit der Zeit, in welcher er selbst lebte, die Fremdheit jener grossen Tage Athens, theils die eigene Befangenheit, nur die sittliche Beschaffenheit des Einzelnen, nicht die staatsmännische Wirksamkeit und den grossen Gang der Geschichte ins Auge zu fassen, machten es ihm unmöglich sich zu einer gerechten Würdigung zu erheben. Sie liessen ihn vielmehr sehr kleinlichen und verkehrten Auffassungen Gehör schenken, obgleich ihm die richtigsten Ansichten im Werke des Thukydides vorlagen, und liessen ihn oft zwischen verschiedenen Ueberlieferungen unentschieden schwanken. Dennoch sind wir Plutarch und dem Geschick, das uns diese Lebensbeschreibung erhalten hat, zu ausserordentlichem Danke verpflichtet, denn eine grosse Menge der wichtigsten Nachrichten haben wir nur aus ihr. Und gerade die Unklarheit, die ihn sehr abweichende Berichte zum Theil unvermittelt neben einander zu stellen oder wenig passend vermitteln zu wollen veranlasste, macht es uns möglich seinen Quellen auf die Spur zu kommen und so den Werth der einzelnen Angaben zu bestimmen.

1) *πολλαὶ μὲν ἀνεφύοντο δίκαι τοῖς νόθοις ἐκ τοῦ γράμματος ἐκείνου τέως διαλανθάνουσαι καὶ παρορώμεναι* heisst es jetzt K. 37. Aber die Endungen sind wol auch hier verwechselt worden; es muss wol heissen *διαλανθάνουσι καὶ παρορωμένοις*. Nicht die Klagen gegen die mit Unrecht als Bürger Geltenden bleiben verborgen und werden übersehn, sondern diese in das Bürgerrecht Eingeschlichenen selbst.

Ueber

einige Pluralbildungen des indogermanischen Verbum.

Von

Theodor Benfey.

Vorgetragen in der Sitzung der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften am 8. März 1867.

I.

Die letzt erreichbaren Formen des Duals und Plurals der indogermanischen Sprachen sind, wie jetzt ziemlich allgemein anerkannt ist:

Dualis 1 *va-si*
2 *tva-si* (im Sanskrit *thas*)
3 *ta-si*
Plural 1 *ma-si*
2 *tva-si* (im Sanskrit *tha*)
3 *anta*.

Die Ansetzung der fünf ersten Formen beruht zunächst auf der in den Veden und im Zend (natürlich mit dem lautlichen Reflex von *s* nämlich *h* und häufiger Dehnung des auslautenden *i*) erhaltenen ersten Person des Plur. *masi*, welche auch noch im Lateinischen (*mus*) und Althochdeutschen *mês* (vgl. Bopp, über das Albanesische, S. 64) wiedergespiegelt wird (vgl. Or. u. Occ. I, 305); ferner auf dem im Zend erhaltenen Reflex der ersten Dualis *vasi* (in *uç-vahi*). Da schon in den Veden vorwaltend, im gewöhnlichen Sanskrit durchweg, jenes *masi* sein auslautendes *i* eingebüsst hat, von dem des Duals *vasi* ausser im Zend keine Spur erscheint, so lag die Vermuthung nah, dass es auch in der zweiten des Dualis und Pluralis und in der dritten des Dualis einst den Auslaut gebildet habe, aber noch früher als in der ersten des Plur. und Dualis eingebüsst sei. Diese, kaum bezweifelbare und wie gesagt, ziem-

lich allgemein angenommene Hypothese findet ihre Bestätigung in der Erklärung dieser Formen, welche im folgenden vorgetragen werden wird.

Eben so allgemein angenommen als die Ansetzung dieser fünf Formen mit ursprünglich auslautendem *i* ist die Ansicht, dass in den indogermanischen Sprachen ursprünglich kein Unterschied zwischen Dual und Plural in dem Verbum bestand, dass die Dualformen ursprünglich auch Pluralformen waren. Erst als sich das Bedürfniss einstellte, die paarweise Zusammengehörigkeit von Dingen, welche paarweis erscheinen, wie die beiden Augen, oder als paarweis zusammengehörig vorgestellt wurden, wie Mann und Weib, Tag und Nacht, einige Götterpaare, wie die Dioskuren, in den Veden Mitra und Varuna u. aa., auch an dem damit verbundenen Verbum auszudrücken, wurde der Dual vom Plural geschieden und erweiterte sich dann aus seiner ursprünglichen Bedeutung 'Paarheit' und 'Mehrheit' zur Bezeichnung der 'Zweiheit'.

Die Scheidung der ursprünglichen Pluralform in eine Dual- und Pluralform findet in der Weise Statt, die sich zu allen Zeiten der Sprachgeschichte, selbst noch unter unsern Augen geltend macht. Phonetisch entstandene Doppelformen werden entweder einige Zeit hindurch im Sprachbewusstsein als Exponenten eines und desselben Begriffs festgehalten; in diesem Fall wird dann — da die Sprache danach strebt, für einen Begriff auch nur einen Exponenten zu fixiren — die eine Form später aus der Sprache eliminirt; oder sie werden auch begrifflich geschieden und in dieser Scheidung in der Sprache dauernd erhalten. Aus jenem Verfahren erklärt sich der Verlust einer Menge von Formen und Wörtern, welche, wenn gleich theilweis ursprünglich nicht ganz synonym, doch durch das generalisirende Vermögen des Menschen, welches in der Sprachgeschichte sich vorzugsweise wirksam zeigt, nach und nach identisch geworden waren; so reducirte sich z. B. die ursprüngliche Menge von Pronominibus, welche ohne Zweifel einst verschiedene Specialisirungen der Demonstration ausdrückten ('der in der Nähe', 'der in der Ferne', 'der gegenwärtige', 'der abwesende', 'der auf dieser oder jener Seite stehende', 'der vorn', 'der hinten', 'der oben', 'der unten') nach und nach auf zwei und selbst ein Demonstrativ. Aus diesem dagegen die Schei-

dung von einst in derselben Bedeutung gebrauchten Wörtern und Formen in begrifflich verschiedene; so hat sich in unsrer Muttersprache seit der Mitte des vorigen Jahrhunderts zwischen den eigentlich nur phonetisch differenziirten Formen 'denn' und 'dann', 'wenn' und 'wann' ein begrifflicher Unterschied entwickelt, den jetzt kein Gebildeter mehr bekämpft, und fast erst unter unsern Augen zwischen 'ahnen' und 'ahnden', 'Ahnung' 'Ahndung u. s. w. trotz der eigentlich unschönen Verstümmelung der richtigen Form, eine so schöne Bedeutungsunterscheidung, dass sich ihr trotz des Sträubens von Tieck u. aa. schon jetzt fast jeder fügt, und in der folgenden Generation das wahre Verhältniss ganz aus dem Sprachbewusstsein geschwunden sein wird.

Durch den grade in der letzterreichbaren Periode der indogermanischen Sprachen und auch noch später eintretenden überaus häufigen Wechsel zwischen *m* und *v* (man vgl. nur z. B. die völlige Identität der Suffixe *mant* und *vant*, deren verschiedene Anwendung im späteren Sanskrit fast nur durch die vorhergehenden Laute bestimmt wird, in den Veden aber noch regellos eintritt, und die Nebenformen derselben)[1],

---

1) Um zunächst auch wenigstens ein Beispiel aus der spätesten Entwicklung zu geben, tritt dem *m* des sanskritischen *tama* in seinem Gebrauch als Ordinalaffix im Urdû (Hindustanisch) *v* gegenüber, während das sonst mit diesem so sehr Hand in Hand gehende Gujarâtî das *m* durchweg bewahrt; man vergleiche

Sskr.	Guj.	Urdû.	
panchama	*pânchamî, uñ*	*pânchvân*	der fünfte.
saptama	*sâtamî, uñ*	*sâthvân*	der siebente.
ashṭama	*âṭhamî, uñ*	*âthvân*	der achte.
navama	*navamî, uñ*	*navân* (für *navavân*)	der neunte.
daçama	*dasamî, uñ*	*dasvân*	der zehnte.

Daran können wir einige analoge Beispiele aus der älteren Zeit der indogermanischen Sprachentwickelung schliessen.

Es versteht sich nämlich für jeden, der die unzähligen Fälle des Wechsels von *m* und *v* kennt, von selbst, dass das Verhältniss des griechischen *ὄγδοος*, welches nach lateinischem *octâvus* für *ὄγδοϝος* steht, zu sskr. *ashṭama*, zend. *astema*, slav. *osmŭi* auf demselben Uebergang beruht; natürlich ist dasselbe auch für lat. *octâvus* anzunehmen, trotzdem dass die Länge des *a* noch keine vollständig genü-

hatten sich für die erste Person des Plur. zwei nur phonetisch verschiedene Formen ***masi*** und ***vasi*** gebildet, von denen die letztere, nachdem die duale Categorie im Sprachbewusstsein sich von der pluralen geschieden hatte, zur Bezeichnung von dieser verwendet wurde, ähnlich wie im geregelten Sanskrit die durch Abstumpfung aus ***mant vant*** entstandenen Nebenformen ***man van*** sich für Ableitungen aus Verben fixirten, jene dagegen nur für solche aus Nominibus, während zahlreiche Abweichungen von dieser Regel in den Veden und selbst im eigentlichen

---

gende Erklärung gefunden hat. Die bekannte Regel, dass im Latein vor *v* alle Vokale ausser *u* lang sind (G. F. Grotefend, grössere lateinische Grammatik für Schulen II, 34 S. 35, 4. Aufl., Frankf. 1824), deutet jedoch auf eine Neigung, Vokale vor dieser Liquida — da Liquidae bekanntlich leicht länger tönen — auch unorganisch zu dehnen, vgl. z. B. auch die Dehnung von *a* vor dem *v* der ersten Dualis im Sskr., die häufigen Dehnungen von Vokalen vor dem Suff. *vant* ebds. und im Griechischen z. B. ***δενδρηϝεντ*** von ***δενδρο***, die sskr. von *i*, *u* vor *y* des Passiv und Precativs u. aa. Eben so ist auch das Verhältniss von lat. *septuâ* in *septua-ginta* gegenüber von griech. ***ἑβδομή-κοντα***, irisch *sechtmo-gat* zu erklären; *septumâ* ist erst in *septuvâ* übergegangen, dann mit dem gewöhnlichen Ausfall von *v* zwischen Vokalen in *septua*. Es steht also *septuva* dem griech. ***ἑβδομη***, irischem *secht-mo* und dem sskr. Ordinale *saptama* bezüglich des *v* für *m* grade so gegenüber wie die Urdûform *sâthvân*. Ich würde diese Vergleichung, die sich für jeden wirklichen Sprachforscher von selbst ergiebt, gar nicht erwähnt haben, wenn nicht Schleicher in seiner übrigens trefflichen Zusammenstellung, ich meine sein 'Compendium der vergleichenden Grammatik der Indogermanischen Sprachen' S. 503, ohne eine Erklärung zu geben, von einem Stamme *septuo*' spräche, 'der sonst nicht erscheint'. Es muss ihm also nicht möglich gewesen sein, diese einfache Vermittlung von ***ἑβδομη*** u. s. w. mit *septuâ* zu erkennen. Beiläufig bemerke ich, dass da das Latein auch in Bezug auf die Bildung des Zahlworts für *neunzig* vermittelst des voranstehenden Ordinale mit dem griechischen übereinstimmt (wahrscheinlich auch mit Celtisch, dessen Form hier jedoch zweifelhaft), nämlich ***ἐνε-νή-κοντα*** (für ****ἐννε-μη-*** und dieses für ***ἐνϝε-μη-***, ****νϝε-μη***, ****νεϝε-μη*** = sskr. Thema *navama*) = latein. *nonâ-ginta* (für *novo-mâ-* vgl. *nônus* = sskr. navamas), sicher auch *octô-ginta* nicht aus dem Cardinale zu erklären ist, sondern mit ***ὀγδοή-κοντα***, irisch *ochtmo-gat* auf eine Stufe zu stellen, so dass hier *octô* für *octovâ* = ***ὀγδοϝη*** steht, womit wir ein, zwar in Bezug auf den Vokallaut jüngeres, aber in Bezug auf die Quantität älteres, Nebenthema von *octâvo* erhalten.

Sanskrit (man vgl. z. B. *ati-shṭhâ-van* und *ati-shṭhâ-vant* vom Verbum *sthâ*, *magha-van* vom Nomen *magha*), so wie Vergleiche mit den verwandten Sprachen (z. B. ἰ-μαντ = sskr. *si-man* von einem Verbum; jenes ist in genau entsprechender Form *si-mant* im Atharva-Veda, IV, 1, 1, VI, 134, 3 bewahrt, vgl. Whitney zum Atharva-Veda Prâtiçâkhya III. 43), ihren ursprünglich ungeschiedenen Gebrauch erweisen.

Aehnlich hatte sich aus der zweiten Person des Plur., ursprünglich *tvasi*, nach der sicherlich schon alten Einbusse des *i*, durch Verlust des auslautenden *s*, der uns so überaus häufig entgegentritt und unzweifelhaft durch den eben so häufigen Uebergang von *s* in einen blossen Hauchlaut vermittelt ward (vgl. z. B. sskr. *uçanâs*, aber wenn *s* nicht durch besondere Anlaute eines nachfolgenden Wortes gehalten wird, *uçanâḥ* und in den Veden nur *uçanâ*, griech. μεν mit ν ἐφελκ. für με statt des im Dorischen erhaltenen μες, lateinisch *amabare* statt *amabaris* u. s. w.) eine abgestumpfte Nebenform gebildet, welche im Sskr. (mit *th* für *tv* durch den aspirirenden Einfluss des *v*[1]) *tha* lautet, im Zend. *ta* und *tha*, Griech. τε, eben so im Slavischen und Littauischen *te*, Gothisch und Irisch, zugleich mit Einbusse des Vokals, dort *th*, hier *d*, *th*. Die so entstandenen Doppelformen schieden sich in der Weise, dass die mit auslautendem *s* den Dual (sskr. *thas*, goth. *ts*, griech. τον, wie μεν für μες), die abgestumpfte dem Plural zu Theil ward. Nur das Latein, welches den Dual ganz eingebüsst hat, macht eine Ausnahme, indem es die Form mit auslautendem *s*, nämlich *tis*, im Plural zeigt. Ob wir daraus schliessen dürfen, dass bei der Sprachtrennung die Unterscheidung noch nicht ganz fest geworden war, wage ich nicht ohne eingehendere Discussion, die uns hier zu weit führen würde, zu entscheiden.

In diesen fünf Formen tritt uns eine ganz bestimmte Analogie entgegen.

---

1) Durch diesen ist vielleicht auch das Suff. *atha* zu erklären, vgl. z. B. das Abstractum *tveshátha* 'das Toben', 'Ungestüm' von dem Adj. *tveshá* 'ungestüm', welches als regelrechtes Abstract *tveshatvá* bilden würde; wegen der Verschiedenheit des Accents, die übrigens bei dem häufigen Accentwechsel kaum zu urgiren, ist vielleicht zu vergl. *â-vasathá* 'Wohnplatz' (s. jedoch Pâṇ. VI. 2. 144); ich würde *bharathá* vergleichen, wenn sich die Abstractbedeut. als ursprüngliche mit Sicherheit erkennen liesse.

Es ist nämlich, wie fast alle Voraussetzungen, welche bis jetzt von mir gemacht sind, ebenfalls allgemein zugestanden, dass die letzterreichbaren Formen der Personalendungen des Singular in der ersten Person ***ma***, in der zweiten ***tva***, in der dritten ***ta*** sind. Die besprochenen fünf Pluralformen unterscheiden sich von ihnen also nur durch Hinzutritt von ***si***; darin haben wir das pluralisirende Element zu sehen und es entsteht nun die Frage, ob dieses die Urform sei und was es bedeute. Beides wird durch die im Weitern zu gebende Erklärung beantwortet werden, aber ehe wir zu dieser übergehen, müssen wir erst einen Blick auf die sechste Form werfen.

Diese Form weicht von der Analogie der fünf übrigen fast vollständig ab. Auch hier ist die Annahme, dass der Auslaut ursprünglich ***a*** gewesen sei (***anta***) und dieses ***a*** sich auf dieselbe Weise in ***i*** verwandelt habe, wie das des Singulars, die allgemein herrschende; wie ursprüngliches ***ma***, ***tva***, ***ta*** schon früh zu ***mi***, ***si*** (für organischeres ***tvi***), ***ti*** ward, so auch ***anta*** zu ***anti***. Die Gründe dieser Umwandlung sind für unsre Aufgabe von keiner Erheblichkeit, daher wir sie ununtersucht lassen. Hervorheben muss ich nur, dass wie keine der indogermanischen Sprachen mehr einen Reflex des ursprünglichen ***a*** im Sing. zeigt, so auch nicht im Auslaut dieser Pluralform; die Formen auf ***i*** müssen sich schon sehr früh festgesetzt haben. Verschieden sind die Ansichten über das anlautende ***a*** in ***anti***; einige rechnen es zu dem Personalexponenten, andere betrachten als Urform von diesem nur ****nta***, als die in allen indogermanischen Sprachen reflectirte Form ***nti***. Wenn ich nun gleich keine Erklärung dieser Pluralform zu geben vermag, so bin ich doch überzeugt, dass eine genauere Untersuchung unzweifelhaft feststellt, dass die Gestalt, welche sich in allen indogermanischen Sprachen wiederspiegelt, ***anti*** ist und wo das anlautende ***a*** fehlt, es nur durch Contraction oder Elision eingebüsst ist. Im Sanskrit geschieht dies nur hinter Themen auf *ă̆* z. B. ***yânti*** aus ***yâ-anti***, ***bodhanti*** aus ***bodha-anti***; daher hinter ***i***, ***u*** volles ***anti*** erscheint z. B. ***yanti*** aus ***i-anti***, ***viyanti*** aus ***vî-anti***, ***stuvanti*** aus ***stu-anti***, ***bruvanti*** aus ***brû-anti*** und vor ***anti*** selbst Einbusse von auslautendem ***â***, wie z. B. ***jahati*** aus ***jahâ-ati*** (für ***anti***). Wenn das gewöhnliche Griechisch ***δεικνῦσι(ν) τιϑεῖσι(ν)***,

διδοῦσι(ν), das Dorische *τιθέντι*, *διδόντι*, *δεικνύντι* zeigen, so ergiebt sich durch die Nebenformen *δεικνύασι(ν)* *τιθέασι(ν)* *διδόασι(ν)*, so wie durch den Accent jenes als Contraction, dieses als Elision. Letztere ist auch für die auf dem Activ ruhenden Medialformen *δείκνυνται* *τίθενται* *δίδονται* aus dialektischen wie *ἱερύαται* zu erschliessen, erstere aus Formen wie *βεβολήατο* u. aa. Tiefer in diese Frage einzugehen, ist für unsre Aufgabe nicht nothwendig.

Die Versuche zur Erklärung dieser Pluralform stimmen darin überein, dass sie sie in Verbindung mit der entsprechenden Singularform (**ta*, später *ti*) setzen. Es ist hier nicht der Ort, sie allsammt in Betracht zu ziehen, sondern ich hebe nur diejenige hervor, welche noch am ehesten etwas ansprechendes hat. Es ist das die von Pott aufgestellte [1]) (Etymologische Forschungen II, 710) und von Schleicher ohne Erwähnung seines Vorgängers adoptirte (Compendium der vergl. Gramm. §. 276 S. 681). Danach ist vor das Pronomen der dritten Person *ta* (*ti*) noch eine, wie es bei Schleicher heisst, „demonstrative Pronominalwurzel“ *an*, *n* getreten, „von welcher der Pronominalstamm *ana-* gebildet ist (im slav., litt. in allen casus gebräuchlich .... altind. instrum. fem. *aná-jâ;* der comparat. zu *ana-* wird von der wurzelform *an* gebildet, lautet also *an-taras* ....), so dass ‘sie’ also auß gedrückt ist durch ‘er und er’ natürlich ohne Genusbestimmung)“.

In Bezug auf diese Erklärung bemerke ich zunächst, dass wenn sie auch vielleicht im Allgemeinen billigenswerth gefunden werden sollte, sie doch in Betreff der den Pronominibus beigelegten Bedeutung einer Correktur zu bedürfen scheint. Es ist nämlich schon absolut nicht wahrscheinlich, dass verschiedene Pronominalstämme ursprünglich gleiche Bedeutung gehabt haben sollten. In der That heisst aber der jenem sskr. *ana* entsprechende slavische sowohl als litt. Reflex (*onŭ; ana*; Nom. msc. *ȧns*, f. *anȧ*) nicht ‘er’ sondern ‘jener’ und dies scheint auch diejenige Bedeutung zu sein, welche sich der ursprünglichen am meisten nähert, wie, trotz der Benutzung dieses Stammes zur Ergänzung der Deklination

1) von Kuhn, de Conjugatione in — MI p. 23 schon dunkel angedeutete.

von sskr. ***idam***, der Zusammenhang desselben mit ***an-ya*** (jener — welcher = ein anderer) im Gegensatz zu ***tya*** (aus ***ta-ya*** dieser — welcher = dieser) und den Negativpartikeln ***an***, ***na*** (jenes, nicht dieses, vgl. ***antarâ*** alter Instrumental von ***antara***, 'der andere' eigentlich 'durch anderes als = ohne', griech. *ἄτερ*) höchst wahrscheinlich macht. Es würde danach statt 'der und der' als Grundbedeutung 'jener und der' aufzustellen sein.

Allein beiden Erklärungen gemäss würde die Verbindung gewissermassen eine von denjenigen Zusammensetzungen sein, welche im Sanskrit Dvandva genannt werden und Wörter mit einander vereinigen die, wenn getrennt, durch 'und' zu verbinden wären. Diese Zusammensetzung hat ausser in dem treuen Gefährten des Sanskrit, dem Zend, in den übrigen indogermanischen Sprachen so gut wie gar keine Analogie. Die einzigen Composita, welche man hierher rechnen kann, sind die von Zahlwörtern, aber auch diese geben sich durch Formen wie *τριςκαίδεκα* für *τρεῖς-καί-δεκα* u. s. w. als blosse Zusammenrückungen kund, und auch das sanskritische Dvandva enthält noch so viele reine Zusammenrückungen (wie ved. ***pitarâ-mâtarâ***, sogar mit beiden Accenten ***turváçá-yádû*** Rv. IV. 30. 17), oder unvollkommene Zusammensetzungen (wie ***pitá-putrau***), dass man seine späte Entstehung daraus mit voller Entschiedenheit folgern kann. Wenn aber eine derartige Zusammensetzung erst so spät entstanden ist, ist es dann wahrscheinlich, dass auf ihr schon eine so alte Bildung ruhen könne?

Gegen diese Auffassung als Dvandva spricht aber noch ein andrer Umstand. Schon in den ältesten Sprachen unsres Stammes finden wir eine Menge zusammengesetzter Pronomina, im Sskr. eben ***a-na*** aus dem Pronominalstamm ***a***, welcher unter andern ebenfalls zur Ergänzung von ***idam*** dient, und ***na***, welches auch in ***e-na*** erscheint, einer Zusammensetzung, die ebenfalls zur Ergänzung von ***idam*** gebraucht wird; ferner ***a-va***, welches, im Sanskrit nur als Partikel bewahrt, im Zend als eigentliches Pronomen demonstrativum waltet; ***a-mu***, ***a-mi***, ***a-ma a-sa-u*** (Nom. s. m. u. f. von ***adas***); im Griechischen erscheint *αὐτὸ* aus ***a-va-ta οὗτο***, *τοῦτο* aus ***sa-u*** (eigentlich ***va***)-***ta***, oder ***ta-u(va)-ta***, lateinisch ***iste*** aus ***id-ta*** u. s. w. Allein keine dieser und ähnlicher Zusammensetzungen hat

eine Dvandva-Bedeutung; ***αὐτό*** = ***a-va-ta*** heisst nicht etwa 'der und der und der', sondern es, sowie auch alle übrigen, sind nur verstärkte Demonstrative, gewissermassen an die Stelle unzusammengesetzter getreten, weil diese, durch häufigen Gebrauch abgerieben, keine volle Geltung mehr hatten. Wenn aber schon diese ältesten indogermanischen Sprachen Pronomina zwar zusammensetzen, nie aber in Dvandva-, sondern, der ältesten Composition gemäss, nur in determinativer [1]) Bedeutung, ist es da auch nur entfernt wahrscheinlich, dass in noch älterer Zeit eine derartige Zusammensetzung Dvandva-Bed. hätte haben können?

Zwei Pronominalzusammensetzungen giebt es nur, in welchen auf den ersten Anblick die Zusammensetzung wenn auch nicht eine Dvandva- doch eine pluralisirende Bedeutung gegeben zu haben scheinen könnte. Es sind diess die durch ***sma*** gebildeten Pluralthemen der Pronomina der ersten und zweiten Person, sskr. ***a-sma*** und ***yu-shma*** (für ***yu-sma***). Allein 1) ist ***sma*** nicht ein einfaches Pronomen, sondern eigentlich ***sa-ma***, alter Superlativ von ***sa*** 'einer' (vgl. lat. ***se-mel***, ***ἅ-παξ***, sskr. ***sa-kṛit*** 'einmal') und daraus 'dieser' und 'mehreres zu einem vereint', 2) ist dieselbe Form schon vor der Sprachtrennung auch zur Weiterbildung mehrerer Pronomina im Singular verwandt (und zwar nur im Singular, nicht wie in Pron. 1, 2 im Plural), z. B. sskr. ***ta-sma*** im Locativ ***tasmin*** (aus ***ta-sma-in***), slav. ***tomi***, litt. ***tamim***, ***tami***, ***tamė***; im Dativ sskr. ***tasmai*** (d. i. ***ta-sma-e***), slav. ***tomu***, litt. ***tamui tam***, goth. ***thamma***. Danach dürfen wir vermuthen, dass sie sowohl hier wie in den Pronominibus der ersten und zweiten Person nur verstärkende Bedeutung hatte, und 3. wird diese Vermuthung in Bezug auf letztere bestätigt durch den sskr. Nom. pl. der zweiten Person ***yû-yam*** (vgl. den Nom. pl. der ersten Plur. ***va-yam*** und goth. ***ju-s***, ***vei-s***), aus welchem folgt, dass dem Sprachbewusstsein schon ***yu***

---

1) so auch in Zusammensetzung von Partikeln, z. B. ***ἐνταῦθα*** 'hier' aus ***ἔνθα*** = sskr. *ádha* (vgl. z. B. dessen Comparativ und Superl. *ádhara*, *adhamá* mit lat. *infero*, *infimo*, gothisch *undar*, *undarô* u. s. w.) und ****αὖθα*** = zend. *avadha* 'dort' (mit der Endung *dha*, welche Lokativ-Bedeutung hat, vgl. z. B. ved. *idha* gewöhnlich *iha* (in diesem (Orte)'); ***ἐντεῦθεν*** 'von da' aus ***ἔνθεν*** = sskr. *adhás* und ***αὖθεν*** (durch das Ablativaffix sskr. *dhas*, zend. *dha*, mit Einbusse des *s*).

allein als Exponent des Plurals galt, woraus wir entnehmen dürfen, dass dasselbe auch in Bezug auf das *a* in *a-sma* der ersten Person, wie es auch immer entstanden sein möge, schon zu der Zeit wo *sma* damit verbunden ward, der Fall war.

Will man trotz alle dem an der Erklärung von *anta* als Dvandva-Compositum festhalten — sich etwa darauf berufend, dass der hervorragend häufigste Gebrauch der dritten Person Plur. des Verbi für ihre absolute Nothwendigkeit spreche[1]), und deshalb die Annahme erlaube, dass sie nach einem in so alter Zeit bestehenden dann für lange obsolet gewordenen und erst später im Sanskrit wieder erwachten Compositionsverfahren gebildet sei — dann würde ich — hervorhebend jedoch, wie sehr zweifelhaft eine Erklärung wird, die auf derartigen Voraussetzungen beruht — eher rathen *anta* in *a-na-ta* zu theilen, um so drei Pronomina zu erhalten.

Will man andrerseits darauf beharren, dass *anta* eine Zusammensetzung von Pronominibus sei, ohne jedoch ein Gewicht darauf zu legen, dass sie grade ein Dvandva sein müsse, dann würde ich vorziehen *ana-ta* 'jener der' im Sinne von 'der oder jener' d. h. im Sinne einer Verallgemeinerung 'alle' zu nehmen, ähnlich wie im Sanskrit die Verbindung von *yad*, Relativum, und *kim*, Interrogativum, oder *yad* und *tad*, Demonstrativum, die Bedeutung 'jeder, jede, jedes', 'alle' hat.

Allein aus dem für die Dvandva-Fassung anführbaren von der Nothwendigkeit der dritten Pluralis entnommenen Grund liesse sich auch folgern, dass diese Pluralbildug *anta* schon eine so alte sei, dass die Art, wie sie aus dem Singular *ta* hervorgegangen, sich gar nicht mehr mit

1) Von dem überwiegend häufigen Gebrauch der dritten Person des Plur. des Verbum kann man sich leicht überzeugen, wenn man einige Seiten einer nicht etwa für bestimmte Zwecke abgefassten Darstellung — z. B. nicht etwa eine Volksrede, wo die erste und zweite Plur. eine hervorragende Rolle spielen — durchliest und sich anmerkt, wie viel mal jede Person vorkömmt. Auch Justi's Zendgrammatik kann zu solcher Statistik dienen, da die erhaltenen Zendschriften die Möglichkeit boten, wenigstens die Verba zusammenzustellen, von denen Formen einer Sprachcategorie vorkommen; deren hat er im Plur. 2 Act. Präs. nur 5; in 1 nur 15; in 3 aber 37.

Sicherheit erkennen lasse, dass vielleicht ein Princip dabei befolgt sei, welches in der weiteren Sprachentwicklung keine Spur zurückgelassen habe. Bemerken will ich nur noch, dass es wohl auf keinen Fall durch Infigirung geschah — etwa aus ***vak-ti*** durch Infigirung von ***an*** ****vak-an-ti*** (sskr. ***vacanti***) ward. Denn von der Infigirung zeigen die indogermanischen Sprachen — abgesehen von dem noch dunkeln speciell sanskritischen Nom. Acc. Voc. pl. ntr. einiger Themen, der den Nasal vielleicht nur nach Analogie der vielen Bildungen aufgenommen hat, in denen er organisch ist, wie z. B. ***yunánti***, von organisch ***yunánt***, wo aber das sskritische Sprachbewusstsein durch das Ueberwiegen der schwachen Form ***yunat*** dazu gelangen konnte, das ***n*** als Bildungsmittel zu betrachten und nun auch auf andre Fälle zu übertragen — nicht die geringste Spur; in Bezug auf die siebente Conj. Cl. z. B. ***yuj*** Präsensthema ***yuñj*** und sich daran schliessenden Formen mit scheinbar eingeschobenem Nasal habe ich nachgewiesen, dass sie auf Verben der fünften (vgl. ζεύγ-νυμι mit ***yuj***) und neunten Conj. Cl. beruhen und der Nasal vor dem letzten Verbalconsonanten durch den assimilirenden Einfluss des ihm nachfolgenden entstanden ist. Da diese Bildungen zu einer Zeit Statt fanden, in welcher die Verba noch allen Classen folgen konnten, so konnten sich natürlich auch alle Classenzeichen wieder von ihnen ablösen und indem solches bei Verben der fünften und neunten geschah, überlebte der durch Assimilation im Verbalthema entstandene Nasal diese Ablösung und es entstand aus ****yug-nu***, vermittelst ***yung-nu*** ****yung***, (sskr. ***yuñj***), aus ***math-nâ***, vermittelst ***manth-nâ***, ***manth***.

Nach allem diesen kann ich die besprochene Erklärung von ***anta***, so ansprechend sie auf den ersten Anblick scheint, keineswegs für sicher oder auch nur sehr wahrscheinlich halten.

Eine sichere Erklärung dagegen glaube ich für die übrigen fünf Pluralformen geben zu können; doch ist sie keine vollständige, indem sie eben ***anta***, oder vielmehr dessen geschwächte Gestalt ***anti*** als pluralisirendes Element derselben nachweist, dieses selbst aber, wie gesagt, noch der Erklärung bedarf.

In Rücksicht darauf, dass die zu gebende Erklärung wohl kaum

einen Zweifel zulässt, werde ich mich in Bezug auf die früheren Erklärungsversuche von Bopp (Vgl. Gr. §. 439), Kuhn (De Conjugatione in MI p. 23), Pott (Etym. Fschgen. II[1] 711) und Schleicher (Comp. d. vgl. Gr. §. 270; 273) nur auf wenige Worte beschränken. Die letzteren drei betrachten nämlich das ***si*** in ***ma-si tva-si*** (sskr. ***thas***) als identisch mit dem ***si***, welches als Zeichen der zweiten Sing. erscheint, so dass ***ma-si*** 'ich du' im Sinne von 'ich und du' 'wir' bedeute, ***tva-si*** 'du und du' 'ihr'.

Gegen diese Erklärung gilt natürlich zunächst alles, was ich gegen die Annahme von Dvandva-Compositionen in der Zeit vor der Sprachtrennung bemerkt habe; hier aber um so mehr, da diese Bildung durch die Form der zweiten Person in eine wenn auch der Sprachtrennung vorausgegangene, doch verhältnissmässig so junge Zeit versetzt wird, dass die Entschuldigung, die man bei dem hohen Alter der Endung ***anti*** vorbringen konnte, hier keine Stelle hat. Denn ***si*** ist erst aus ***tva*** durch phonetische Umwandlung hervorgegangen, also sicherlich verhältnissmässig jung und daher kaum glaublich, dass wenn man zu der Zeit Dvandva-Zusammensetzungen gebildet hätte, sie in allen indogermanischen Sprachen so spurlos verschwunden und nur im Sanskrit erhalten, oder vielmehr auch da erst nach seiner Individualisirung neu geschaffen wären.

Aber die Annahme dieser so stark umgewandelten Form der zweiten Singularis entscheidet überhaupt gegen die Richtigkeit dieser Erklärung. Die Pluralformen sind für die Sprache viel zu nothwendig, als dass sie nicht schon lange vor der Zeit hätten fixirt sein sollen, wo ***tv*** in der Präsensform in ***s*** übergegangen war. Dass aber vor diesen Pluralformen andre existirt hätten, welche durch diese neue erst wieder eliminirt seien, davon zeigen sich nirgends Spuren und durch die Erklärung dieser Formen, welche ich vorschlage, fällt jede Veranlassung zu einer derartigen Annahme weg.

Meine Erklärung geht davon aus, dass im Sanskrit die Endung der dritten Person Plur. des reduplicirten Perfects ***us*** dem dorischen ***αντι*** (***ἐμπεφύκαντι***), gewöhnlichem ***ασι*** gegenüber steht, z. B. ***bubhuj-ús πεφεύγασι***. Dieses ***αντι, ασι*** entspricht dem ***anti***, welches die dritte Plur. Präs. bildet und

da das reduplicirte Perf. ursprünglich ein reduplicirtes Präsens ist, so folgt schon daraus, dass das Griechische die organischere Form der Endung bewahrt, das Sanskrit aber sie höchst wahrscheinlich auf rein phonetischem Wege umgewandelt hat. Dafür entscheiden auch die verwandten Sprachen; zunächst Lateinisch, welches grade wie im Präsens das auslautende *i* eingebüsst hat, man vergleiche z. B. ***ag-unt*** (sskr. ***aj-anti***) mit ***eg-ēr-unt***, welchem, wenn das Sanskrit von ***aj*** ein periphrastisches Perfect und zwar mit Reduplication (vgl. z. B. ***bibharâm âsa*** mit Redupl.) bilden dürfte, **âj-âm âs-us* (für organischeres ***âs-anti***) entsprechen würde. Das Gothische hat auch das *t* eingebüsst ***bug-un*** = sskr. ***bubhujus*** für ***bubhujanti***. Auf dieser Verstümmelung ruht auch die Zendform, nur dass hier mit dem die ganze Geschichte der indogermanischen Sprachen durchziehenden Uebergang von *n* in *r* [1]) der Auslaut zu *r* ward (vgl. z. B. im Zend Thema ***karshvare*** neben ***karshvan***, 'Welttheil', ***khshapara***

1) Die Bemerkung dieses Uebergangs war und ist unzweifelhaft eine der folgenreichsten für die Erklärung der Entwickelung der indogermanischen Sprachen. Er beruht auf der Neigung der Dentalen sich ein *r* anschiessen zu lassen (vgl. Justi in Or. u. Occ. III, 379 ff. und meine Note S. 383). Diese Neigung trat am frühesten und gewaltigsten im dentalen Nasal auf; denn während die übrigen Dentale *t, th, d, dh* nur durch unmittelbar vorhergehende *sh, h* und schon entstandene Cerebrale im Sanskrit cerebralisirt werden, geschieht dasselbe bei *n* sobald nur im Worte ein *sh, r* oder *ṛi ṛî* vorhergeht, mag es auch noch so fern stehen, sobald nur nicht ein Laut zwischen ihm und jenen Lauten steht, der den Einfluss der letzteren paralysirt. Ferner: der cerebralisirende Einfluss von unmittelbar vorhergehendem oder folgendem *r* auf die übrigen Dentale zeigt sich erst in den indischen Volkssprachen; was sich der Art im Sanskrit findet, ist aus diesen aufgenommen. Endlich während viele Dentale im Prakrit auch ohne weiteres (ohne Einfluss von *r, sh*) cerebral geworden sind, haben sich doch eine Menge *t, th, d, dh* hier auch erhalten; *n* dagegen ist ausser vor Dentalen stets zu *ṇ* cerebralisirt, und auch von letztrer Ausnahme finden sich Ausnahmen, z. B. *ṇḍ* für *nd*. Wir können daraus entnehmen, dass in *n* schon früh ein *r* Element theils durch *sh, r, ṛl, ṛî* hervorgerufen ward, theils auch von selbst hervortrat und in vielen Fällen so mächtig ward, dass es das nasale Element ganz absorbirte und die Form mit *r* sich entweder neben der mit *n* geltend machte (wie *yajvarî* neben *yagvanî* von *yajvan*), oder diese ganz verdrängte (wie *pîvarî* von *pîvan*).

neben ***khshapan***, 'Nacht', ***safare*** neben ***safan***, 'Rachen', ***thanvara*** neben ***thanvana***), und entweder da kein ***r*** im Zend auslauten darf ein ***e*** oder im Wechsel damit (Justi, Grammat. §. 37) ***é*** daran trat, oder wie wir in II sehen werden, wahrscheinlich auf eine andere Weise entstand, z. B. ***áoñh-are*** oder ***áoñharé*** (vermittelst ****áoñh-anti***, ****áoñhant*** ****áoñhan***, ****áoñhar***, ***áoñhare***) = sskr. ***ás-us***.

Der Uebergang von ***anti*** in ***us*** oder wahrscheinlich ursprünglich ***usi*** hat gar nichts auffallendes; er erinnert ganz an den griechischen von ***οντι*** (für ***anti***) in ***ουσι***. Doch will ich sogleich darauf aufmerksam machen, dass wie hier im Sanskrit ***us*** für ***anti*** im reduplicirten Perfectum erscheint, so auch für ***an*** (statt organischeren ***ant*** aus ***anti***) im Imperfect reduplicirter Präsentia, z. B. ***ábibharus*** für **ábibharan*** (wie von ***budh ábodhan***), ferner im Potential, so dass hier im Sskr. statt lat. ***ient*** (in ***s-ient***), zend. ***yen*** (z. B. im ***paca-yen***) griech. ***ιεν*** (z. B. ***φέρο-ιεν***), ***yus*** erscheint (***duh-yus***, vedisch noch ***yan*** in ***duh-íyan***). Ausserdem ist ***us***, statt ***an***, in wenigen Formen des ersten Aorist geltend geworden (z. B. von ***dá*** 'geben' ***adus*** gegenüber von zend ***dān*** = ***dá-an***) und arbiträr in einigen Imperfecten.

Ist sskr. ***us*** in dieser dritten Person Plur. entschieden Umwandlung von ***anti***, so entsteht die Frage ob das auslautende ***us*** in der zweiten und dritten Person des Duals Act. in diesem Perfect, nämlich ***athus***, ***atus***, nicht auf dieselbe Weise entstanden sei; und die Vergleichung des Zend macht es höchst wahrscheinlich, ja so gut als gewiss, dass wir diese Frage bejahen müssen. Die zwei Formen der dritten Person, welche hier bewahrt sind, ***cávarezátaré vaocátaré*** (Yçn. XIV, 12 Sp., XIII, 4 W.)[1] lauten beide auf ***aré*** aus, grade wie die dem sskr. ***ás-us*** entsprechende Form ***áoñh-aré***. Das dem ***t*** vorhergehende lange ***a***, welches dem sskr. kurzen ***a*** in ***atus*** gegenübersteht, begründet keinen wesentlichen Unterschied; die Differenz dürfen wir wohl unbedenklich aus dem Accent erklären. Denn, obgleich uns der Accent im Zend nicht überliefert ist,

1) Justi's Angabe unter *varez*, dass diese Form 2 Dual. Pf. sei, ist Druckfehler; die daneben stehenden Formen *vaocátaré* nimmt er unter *vac*, so wie *mâmanâitê* unter *man*, wie in der Grammatik, mit Recht als 3. Dual.

so spricht doch schon die grosse Uebereinstimmung dieser ganzen Sprache, insbesondere mit dem vedischen Sanskrit, dafür, dass auch der Accent im Wesentlichen mit dem des Sanskrits übereinstimmt, und diese Annahme lässt sich auch durch mehrere formative Erscheinungen fest stellen. Im Sskr. fällt aber der Accent auf ẹben dieses ***a***, so dass ***vávṛj-átus*** (vgl. ***vávṛj*** in ***vávṛj-e*** Rigveda VII. 39, 2) ***vavac-átus*** (vgl. ved. ***vavac*** in ***vavácа*** Rigv. I. 67, 4) den beiden Zendformen im Sanskrit entsprechen würden. Die Dehnung des ***a*** ist aber durch den darauf fallenden Accent herbeigeführt, der ja fast in allen Sprachen nicht selten auf diese Weise wirkt.

Beruhte das zendische ***arė*** in ***áoṅh-arė*** auf ursprünglichem ***anti***, so ist dasselbe auch hier der Fall und wir erhalten als organischere Form von sskr. ***átus*** und zendischem ***âtare*** die Form ****atanti***.

Was aber von der dritten Person des Duals gilt, dürfen wir unbedenklich auch von der zweiten annehmen, und wenn uns hier der bestätigende Reflex des Zend fehlt, so erklärt sich dies aus dem geringen Umfang der Zendschriften, in denen keine zweite Person des Dualis Pf. Act. bewahrt ist. Wir dürfen also auch für sskr. ***áthus*** als organischere Form ****athanti*** ansetzen.

Das Pf. reduplicatum ist aber, wie schon bemerkt, weiter nichts als das reduplicirte Präsens und zwar von zwei oder vielleicht drei Formen, nämlich der die Personalendungen ohne weiteres an das Verbalthema schliessenden (der sskr. II. Conj. Cl.) und der mit ***a*** zwischen dem Verbalstamm und der Personalendung, und zwar, wie mir scheint, entweder nur in der Gestalt, wo das ***a*** accentuirt ist (sskr. VI. Conj. Cl.), oder in beiden Gestalten, nämlich auch in der mit dem Accent auf der Stammsylbe (sskr. VI. und I. Conj. Cl.). Eine eingehendere Entwicklung und Discussion dieser Ansicht würde hier zu weit führen; ich hoffe sie bald in einer besondren Abhandlung zu erörtern. Für jetzt mache ich nur darauf aufmerksam, dass die Präsens-Bildungen durch hinzutretendes ***a*** nicht wesentlich von denen ohne dasselbe verschieden sind — wie das in Bezug auf die übrigen Präsensthemen der Fall ist, in denen das Präsenscharakteristikum ursprünglich ein begriffmodificirendes Element

war —, dass ferner kaum zu bezweifeln ist, dass *a* nur euphonisch entstanden ist, hervorgerufen durch die Menge consonantisch auslautender Verbalthemen, und erst später, in Folge seiner vorherrschenden Erscheinung im Präsensthema, auch bei vokalisch auslautenden sich eindrängte, wie es ja seine Herrschaft auch in der historisch bekannten Zeit immer weiter ausdehnte, z. B. die reduplicirte Form von *han* eigentlich **jihan* schon in den Veden vermittelst einstigen **jihaná* (vgl. *sídá* für *sisadá*) in **jighná* dann *jighna* verwandelte (vgl. *sída* neben *sídá*), die reduplicirte Form von ursprachlich *gan* sskr. *jajan*, im Griech. in *γιγνο*, lat. *gigno* und vieles andre der Art. Was die Perfectformen mit und ohne *a* betrifft, so vergleiche man die analoge Erscheinung im sskr. VI. Aorist im Verhältniss zum dritten, indem jener auf einem reduplicirten Aorist ohne suffixales *a* beruht, dessen Spuren sich auch noch in den Veden finden (kurze Sskr. Gr. §. 287).

Ist diese Ansicht richtig, so dass also z. B. sskr. Dual. 2. *bubhujáthus*, 3. *bubhujátus*, Pl. 3. *bubhujús* im Wesentlichen nur eine Reduplication der entsprechenden Präsensformen *bhujáthas*, *bhujátas*, *bhujánti* (biegen) sind, griech. Dual. 2. 3. *πεφεύγατον*, Pl. 3. *πεφεύγασι* (für *πεφεύγαντι*) von *φεύγετον φεύγουσι* (für *φεύγοντι*), goth. *buguth*, *bugun* von *biugit biugand* (aber auf dem Präsens mit accentuirtem *a* beruhend), so sind auch die Endungen von 2. 3. Dual. im Präsens sskr. *thas*, *tas*, so wie die sich daran schliessenden der verwandten Sprachen aus *thanti* und *tanti* hervorgegangen. Auch hier werden wir, wie bei *us* auf *usi* auf die Mittelformen *thasi*, *tasi* verwiesen, und diese waren ja grade diejenigen, welche wir in Anfang dieser Darstellung als zunächst letzterreichbare aufgestellt haben. Der Uebergang von *thanti*, *tanti* in *thasi*, *tasi* liegt aber augenscheinlich bei weitem näher als der in *thusi*, *tusi* und da wir die Bemerkung gemacht haben, dass *u* statt *a* vorzugsweise in längeren Formen erscheint, so irren wir schwerlich wenn wir die Umwandlung von *athanti*, *atanti* in *athus*, *atus* im Pfect. der Länge des Wortes zuschreiben. Ist aber *thasi*, *tasi* aus *thanti*, *tanti* entstanden, so ist dieselbe Entstehung auch für die ganz analog gebildeten 1. Dual. *vasi* und Plur. *masi* anzunehmen. Auch diese stehen dann für ursprünglicheres *vanti*, *manti*.

Sind aber die letzterreichbaren Formen der hier in Betracht gezogenen Dual- und Pluralformen nicht mehr *vasi* u. s. w., sondern *vanti*, *tvanti* (sskr. *thas*) *tanti*, *manti*, *tvanti* (sskr. *tha*), so liegt die Erklärung derselben auf der Hand.

Wie auch immer die Personalendung der dritten Plur. *anta*, dann *anti*, entstanden sein mag, wir kennen sie nur als Exponenten der dritten Person der Mehrheit; es ist aber klar, dass, abgesehen von Nominibus, die 'Vielheit' bedeuten, es schwerlich und auf keinen Fall unter den Elementen der Verbalbildungen einen Ausdruck giebt, der so sehr geeignet ist, Mehrheit überhaupt zu bezeichnen, als die Mehrheit der dritten Person. So unpassend es uns auf unserm Standpunkt, der den alten grammatischen Bildungen so fern liegt, auch vorkommen mag, dass eine Verbindung der Einheit der ersten Person mit der Mehrheit der dritten (ein 'ich die') die Mehrheit der ersten ('wir') bezeichnen soll, dass in dieser wesentlich determinativen Zusammensetzung der Begriff 'Mehrheit der dritten Person' näher bestimmt ward dadurch, dass diese Mehrheit die erste Person betreffen soll, so ist dies doch in vollständiger Analogie mit einer keinesweges geringen Anzahl von sprachlichen Erscheinungen, ja mit dem eigentlichen Princip der begrifflichen Entwickelung der indogermanischen Sprachen. Der specielle Begriff hat sich zu dem der Mehrheit überhaupt erweitert, wesentlich in derselben Weise, wie im Sskr. z. B. *goshṭha* 'Kuhstall' die Bedeutung 'Stall' überhaupt angenommen hat und eine Zusammensetzung, welche etymologisch 'Löwenkuhstall' bedeuten würde, in Wirklichkeit nur 'Löwenstall' bedeutet. Wie sehr die dritte Person Pluralis zur Pluralisirung überhaupt tauglich ist, zeigt auch z. B. die griechische Pluralisirung der dritten Singularis des Imperativ durch Hinzutritt von *σαν*, der dritten Person Plur. des Imperfect von *ἐσ-* 'sein', (*τυπτέτω: τυπτέτω-σαν* u. s. w.). Denn die etymologische Bed. 'er sie sind' steht der Bedeutung 'sie' völlig eben so fern, als die Verbindung von 'ich sie' dem 'wir'. Ja noch ferner, denn wenn wir in Formen, wie z. B. *τιθείη-σαν* für *τιθεῖ-εν*, dieselbe dritte Person Plur. Impf. von *ἐσ* mit der blossen Personalendung im Wechsel sehen, grade wie im Prakrit die erste Ps. Plur. (nach den Grammatikern auch

Sing. vgl. Lassen I. l. Prâcr. p. 335. 336) bald nur durch die Personalendung (*mo* und *ma*, statt sskr. *mas*, und *mi*) gebildet wird, bald aber durch Zutritt der ersten Person Plur. und Sing. desselben Verbum *as* 'sein' (*mha* und *mho* für sskr. *smas* lat. *sumus*, *mhi* für sskr. *asmi*[1]), dann müssen wir erkennen, dass auch die Verwendung von *σαν* zur Pluralisirung des Sing. Imperativi weit entfernt durch die Verbalbedeutung von *σαν* gefördert zu sein, vielmehr nur dadurch möglich ward, dass die Verbalbedeutung von der persönlichen absorbirt, *σαν* mit der dritten Person Plur. identificirt ward. Dazwischen aber, ob eine dritte Person Singularis oder eine erste oder zweite durch die dritte Pluralis pluralisirt wird, ist absolut kein Unterschied; konnte 'er sie' = 'sie' werden, so konnte auch 'ich sie' den Sinn von 'wir', 'du sie' den Sinn von 'ihr' erhalten; in allen drei Fällen wirkt der Plural 'sie' nur pluralisirend, das pronominale Moment ist in der Verbindung zu einer neuen Begriffseinheit untergegangen.

Wenn bei der Verbindung von *ma*, *tva* u. s. w. mit *anta* (weiter *anti*) die beiden zusammentreffenden *a* nicht contrahirt sind, sondern das eine derselben elidirt, so hat das seine Analogie in der Verbindung aller auf *a* auslautenden Themen mit demselben *anti* z. B. sskr. *bodha-anti* = *bodhanti;* überhaupt scheint in alten Formationen Elision häufiger gewesen zu sein, als Contraction; findet doch selbst Elision des auslautenden *â* im Perfectum vor suffixanlautendem *a* Statt z. B. *dadá-áthus* wird *dadáthus*, ebenso im 3. Dual. *dadátus* und 2. Plur. *dadá;* auch 3. Plur. sskr. *dadús* (für *dadá-us*) beruht schon auf **dadanti* (nicht *dadánti*), wie das kurze *a* im zendischen *dâdh-are* zeigt.

II.

Wie es wohl nicht leicht eine Erklärung schwierigerer Bildungen der indogermanischen Sprachen giebt, gegen welche sich nicht der eine oder andere Einwand erheben liesse, so wird auch die eben versuchte

1) auf letzterem beruht der auch für das Sanskrit angeführte Gebrauch von *asmi* 'ich bin' in der Bed. von *aham* 'ich', vgl. Böhtl.-Roth Wtb. I. S. 536.

aus diesem oder jenem Grunde vielleicht einige Bedenken hervorrufen. Ich habe mir vieles, vielleicht alles zu vergegenwärtigen gesucht, was man dagegen vorzubringen im Stande sein möchte, finde aber nur zwei Punkte, welche mir erheblich genug scheinen, um einer genaueren Erörterung, beziehungsweise Abweisung zu bedürfen.

Den eigentlichen Angelpunkt meiner Auffassung bildeten die Zendformen des dritten Plur. Pf. red. auf *are* oder *aré*, in denen ich das *r* als Vertreter von *s* nahm und mich über die Entstehung des *e* noch nicht mit Sicherheit aussprach.

Ausser der ziemlich beträchtlichen Anzahl von Formen auf *are* und *aré* führt nun Justi noch zwei Formen auf, welche auf *s* enden, nämlich: *açur-us* und *cikôit-ares*. Was die erste Form betrifft, so schlägt er im Glossar unter *ir* die Identification derselben mit sskr. *âiyarus*, der dritten Plur. Impf. von *ṛi*, vor. und ich bin überzeugt, dass er bei ihr allein hätte stehen bleiben sollen (vgl. Conj. Impf. *us-yarât* für *us-iarât*), da beide Formen — abgesehen von dem *u*, welches sich entweder durch Assimilation an das der folgenden Sylbe erklärt, oder, jedoch für das Zend minder wahrscheinlich, aus der im Sskr., besonders dem dem Zend so nahe stehenden vedischen, hervortretenden Neigung *a* vor *r* in *u* zu verwandeln (vgl. ved. Intensiv von *tar tartur*, gewöhnliches Intensiv von *car cancur*) — wesentlich gleich sind; dass die im Sanskrit in der dritten Plur. des Imperfect der reduplicirenden Verba regelmässige Endung *us* statt *ant* im Zend nur einmal erscheint, hat um so weniger auffallendes, da ausserdem überhaupt nur zwei Formen dieser Bildung belegt sind. Dass beide Formen in älterer Zeit neben einander bestanden, versteht sich von selbst, da *us* wie *an* erst aus *ant* entstanden sind, und zu allem Ueberfluss wird es durch die Veden bestätigt, wo im Conjunctiv Imperf. noch die Endung *an* erscheint (vgl. auch ved. *an* neben dem gewöhnlichen *us* in *duhîyán* statt des gewöhnlichen *duhyús* Rigv. 1. 120. 9). Bei der so durchgreifenden Uebereinstimmung der vedischen und Zend-Sprache ist es kaum eine Hypothese zu nennen, wenn wir annehmen, dass beide Formen auch einst im Zend bestanden, die eine sich nur in einem, die andre in zwei Verben erhalten hat.

Es kömmt also für uns nur die Form auf *ares* in Betracht. Dass hier *s* kein müssiger Zusatz sei, versteht sich von selbst. Im Gegentheil lässt sich schon vornweg annehmen, dass es trotzdem, dass es nur einmal erhalten ist, ein wesentlicher Bestandtheil der Form sei und in denen, wo es fehlt, wie auslautendes *s* im Zend so oft (vgl. z. B. Nom. plur. *mashyâ* für sskr. *manushyâs*), eingebüsst. Als nächste Grundlage von *ares* ist uns *ant* oder noch *anti* entgegengetreten. Wir haben zwar oben angenommen, dass *n* zu *r* geworden, nach Einbusse des darauf folgenden *t*; allein diese Annahme war keineswegs nothwendig; *n* ist nicht bloss im Auslaut (wie in dem angeführten zend. *safare*, dem griech. *πῖαρ* für (*πιαν*, vgl. *πῖον* und sskr. *pîvan*) zu *r* geworden, sondern vielfach auch bei nachfolgendem Vokal, z. B. in dem angeführten *thanvara*, dem sskr. *pîvara* für *pîvan-a* und, da das femininale *i* nicht unwahrscheinlich für ursprüngliches *yâ* steht, auch vor *y* (z. B. in *πίειρα* für *πιερja* und dieses aus *πιϝενja* = sskr. *pîvar-î* von *pîvan*), entschieden in sskr. *sûrya* aus *savar-ya* für *savan-ya* (vgl. Or. u. Occ. I. 285 und II. 535). Es ist daher auch an und für sich gar nicht bedenklich, eine Umwandlung von *n* in *r* auch vor *t* anzunehmen und für die Richtigkeit dieser Annahme im Allgemeinen entscheidet zunächst das griechische Nomen *δαμαρτ* 'die Gattin'; denn es ist keinem Zweifel zu unterwerfen, dass es von *δαμ* (= sskr. *dam* goth. *ga-timan* ahd. *zim-an* 'gefüge, unterwürfig, zahm sein.') stammend, den Sinn eines Ptcp. Präs. 'die sich unterwerfende' hat; die alte Form dieses Ptcp. würde *δαμαντ* sein, mit *r* für *n* *δαμαρτ*. Ferner griech. *ὕδωρ*, im Genit. u. s. w. *ὕδατος*; der Form mit auslautendem *r* entspricht ahd. *wazar*; im Sskr. und Goth. haben wir die Form auf *n* (sskr. *udan*, goth. *vatan*, Nom. Sing. *vatô*) statt auslautenden *ρ* und *τ*; es treten also, da die letzterreichbare Form des Verbalthema *vad* ist, nebeneinander zunächst *vadat*, *vadan* und *vadar*; es ist aber bekannt, dass als Grundlage aller drei Formen *vadant* anzusetzen ist, das Ptcp. Präs. von *vad*; *vadat* ist dessen schwache, *vadan* die abgestumpfte Form; in Bezug auf *vadar* kann man nun auf den ersten Anblick schwanken, ob es unmittelbar aus *vadant*, durch Uebergang des *n* in *r* und nachfolgende Einbusse des *t*, oder erst aus *vadan*, entstanden sei; allein für das Griechi-

sche wenigstens scheint mir das *ω* vor *ρ* dafür zu entscheiden, dass es wie *δαμαρτ* unmittelbar aus *vadant* entstanden ist, und das Thema *vadart* *ὄδαρτ* lautete, da die Länge sich wohl nur dadurch erklärt, dass ihr einst Position folgte. Wie man sich phonetisch den Uebergang von *n* vor *t* in *r* zu verdeutlichen habe, wage ich nicht zu entscheiden. Bei der in allen Sprachen vorkommenden Spaltung von Consonantengruppen durch Einschiebung eines ursprünglich schwachtönenden Vokals, der aber im Laufe der Entwickelung sich auch sehr zu kräftigen vermochte, mochte zwischen *nt* ein derartiger schwacher Vokal eingeschoben gewesen sein und dadurch die Umwandlung von *n* in *r* erleichtert haben; — man vgl. z. B. die Entstehung der starken Formen der siebenten Conjug. Cl. im Sanskrit und Zend durch Einschiebung eines Vokals zwischen der mit dem Nasal beginnenden Gruppe, der im Sanskrit entschieden, wahrscheinlich auch im Zend, den Accent zu tragen befähigt ward, z. B. *yunáj-mi* aus *yuñj*, welches in *yuñjvás* u. s. w. erscheint (vgl. oben S. 49). Das *e* welches in *are*, *ares* erscheint, liesse sich als eben dieser schwache Vokal auffassen, so dass *are*, *ares* auf *anet* für *ant* beruhte, und jene Form vielleicht die Entstehung des *r* unterstützt hätte. Doch giebt es dafür auch eine andre Erklärung; es ist nämlich, wie Or. u. Occ. III, 25 bemerkt ist, im alten Sanskrit und Zend zwischen *r* und einem unmittelbar folgenden Consonanten ein schwacher Vokal gesprochen; dieses *e* konnte demnach auch erst entstehn, nachdem *n* in *r* übergegangen war, also aus *rt*, zendisch *ret* werden, wie z. B. *dadareça* aus *dadarça* (Pf. red. von *darç* 'sehen'). Ich will zwar nicht mit Sicherheit entscheiden, welche Erklärung vorzuziehen sei, doch neige ich mich zu der letzteren Annahme und zwar aus dem Grunde, weil, wie ich im Or. und Occ. III. 33 nachgewiesen, der sskr. Vokal *ṛi*, welchem das zendische *ere* entspricht, vorzugsweise durch den zwischen *r* und einem nachfolgenden Consonanten eingeschobenen schwachen Vokal entsteht, im Zend z. B. aus dem ursprünglichen Reflex von ursprachlichem *sarj* nämlich **hars* zunächst durch Einschiebung dieses Vokals *hares*, dann wenigstens theilweise durch assimilirenden Einfluss desselben auf den dem *r* vorhergehenden *heres* (im Sskr. ebenso aus *sarj* zunächst **saraj*

dann *saraj*, geschrieben *srij*); diese Umwandlung finden wir in der von Westergaard statt des besprochenen *cikôit-ares* aufgenommenen Leseart *cikôit-eres*. Welche von beiden Lesearten vorzuziehen, wage ich nicht zu entscheiden; die organischere ist natürlich die mit *a* vor *r;* doch mag die Schwächung des *a* schon überaus alt sein, so dass beide Formen gleichberechtigt wären.

Was nun das auslautende *s* betrifft, so dürfen wir darin unbedenklich eine Umwandlung des *t* in der ursprünglichen Endung *anti (anta)* sehen; sie trat wahrscheinlich ein, nachdem der Vokal hinter *t* eingebüsst war. Es giebt zwar im Zend ausser dem erwähnten *us* für *ant* (in *aêurus*) kein sicheres Beispiel eines unmittelbaren Uebergangs von auslautendem *t* in *s;* allein auch im Sskr. giebt es nur den in *us;* denn die Verwandlung des auslautenden *t* im Suff. des Ptcp. Pf. red. Parasm. *vant* in *s* in den Formen *vas* (vedisch) *us* und *vâṅs* ist wohl unzweifelhaft (vgl. Or. u. Occ. I. 253 ff.) durch den organischen Nominativ Sing. Masc. auf *vants* herbeigeführt; dennoch zweifelt niemand an der Entstehung des sskr. *us* aus *anti* (*anta*) und *ant*, und zwar trotzdem, dass im Sskr. nicht nur — wie schon bemerkt — der Uebergang von *t* in *s* sonst gar nicht erscheint, sondern sogar umgekehrt nicht selten *s* in *t*, *d* übergeht; im Zend dagegen giebt es zwar im Auslaut keinen weiteren Beleg für diesen Uebergang; sonst aber ist der von T-Lauten in *s* ein überaus häufiger, so dass hier die Annahme auf jeden Fall noch mehr Berechtigung als im Sanskrit hat. Ausserdem kann im Zend selbst im Auslaut wenigstens nur eine Art T-Lautes erscheinen, nämlich der mit einem Punkte transcribirte, und da sonst Zischlaute [1]) und Nasale die einzigen Consonanten sind, auf welche im Zend ein Wort auslauten darf (Justi Gramm. §. 111), so ist es kaum zu bezweifeln, dass dieses punktirte Ṭ den Zischlauten sehr nahe stand, was auch vielleicht dadurch

1) Die häufige Endung der Wörter auf Zischlaute fiel bekanntlich auch Herodot im Persischen so sehr auf, dass er sie irrig, wie sich das bei einem, der die Sprache nicht erlernt hatte, aber häufig hörte, leicht erklären lässt, auf die ganze Sprache ausdehnte.

eine Bestätigung erhält, dass ihm im Altpersischen der Keilschriften, wo es nicht abgefallen ist (wie z. B. in *avá* = zend. *avaṭ*), *sh* entspricht (z. B. *akhunaush* = zend. *(a)kerenaoṭ*). Wenn Justi's Ableitung von *áeish* 'offenbar' aus *vid* zu billigen ist, so hätten wir hier vielleicht noch einen unmittelbaren Uebergang eines auslautenden T-Lautes in einen Zischlaut, allein sie wird etwas bedenklich durch das entsprechende sskr. *ávis*, welches Weber jedoch ebenfalls auf *vid* zurückführt, und auf jeden Fall bleibt zweifelhaft, ob der Uebergang ein unmittelbarer oder durch einstigen Antritt eines andern Lautes an *vid* herbeigeführter wäre. Doch wie man auch darüber denken möge, die Entstehung des *s* in *cikôit-eres -ares* aus *t* darf als unbezweifelbar betrachtet werden. Wir haben also diese Endung *ares* als die vollere Form anzusehen von der *are* und *aré* erst eine Abstumpfung ist.

Mit dieser Form *ares* stehen aber augenscheinlich in innigster Verbindung die Formen *buyáres* oder **ris* und *jamyáres* oder **ris*, (dem so häufigen Wechsel zwischen *e* und *i* gemäss, vgl. Justi Gramm. §. 37), so wie *aiwi-çac-yáres*. In dieser Verbindung liegt eine Waffe gegen meine Auffassung, welche ich vor zwölf Jahren in meiner kurzen Sanskrit-Grammatik §. 160 S. 96 selbst geschmiedet habe. Ich glaubte nämlich am angeführten Orte *bu-yáres* unmittelbar mit der sskr. dritten Plur. des Precativ *bhû-yásus* zusammenstellen zu dürfen und indem hier *yásus* für ursprünglicheres *yásant* steht, fasste ich das zendische *r* als Reflex des sanskritischen *s*. In diesem *yásus* für *yásant* liegt aber bekanntlich eine Zusammensetzung des Verbum *yá* 'gehen' mit der dritten Person Plur. Imperf. des Verbum *as* sein (sskr. *ásan*, ohne Augm. *asan* und mit der in diesem Verbum so häufigen und im Sskr. in den nicht zu verstärkenden Verbalformen regelrechten Einbusse des verbalen *a*, *san*). Wäre nun jene Auffassung richtig, so würde sich für die Perfectendung *ares* als Urform *asanti (*asanta)* ergeben und für *âonhare* z. B. die, zumal für eine so alte Bildung ganz unglaubliche, ja unmögliche Urform oder vielmehr Unform *âs-as-anti*, die, sobald man das auslautende *i* ablöst, in der That der alte reduplicirte Aorist ist, aber nimmermehr ein Perfect sein könnte. Hätte ich damals diese Consequenz ahnen können,

so würde sie mich sicher von der Aufstellung dieser Identification zurückgehalten haben. Allein die Formen auf *are* identificirte ich mit den sskr. medialen auf *re* und *ire*, was vor zwölf Jahren, wo das zendische Sprachmaterial noch nicht so gesichtet und geordnet vorlag, wie jetzt (seit 1864) durch die fleissige und höchstverdienstliche Arbeit von Justi, um so mehr zu entschuldigen war, als diese Identification selbst in der neuen Ausgabe von Bopp's vergleichender Grammatik (1859. II. §. 640 S. 527) noch festgehalten wird. Schleicher, welcher in seinem Compendium der vgl. Gr. §. 276, S. 682 dieselbe Erklärung von *jamyâres* giebt, wie ich 1855, vielleicht selbstständig, da er meiner dabei nicht erwähnt, schaudert vor einem *âs-as-anti* nicht zurück, worüber unter wirklichen Sprachforschern natürlich kein Wort zu verlieren ist. Justi hat von meiner Auffassung keine Notiz genommen und zwar mit Recht; auch ich habe sie aufgegeben, sobald ich einerseits erkannte, dass die Perfectformen auf *ares*, *are*, *aré* dem Parasmaipada angehören, andrerseits, was vor zwölf Jahren noch nicht der Fall war, mich von dem ausserordentlichen Umfang der Umwandlung von *s* in *r* überzeugt hatte.

Allein wenn gleich ich es vollständig billige, dass Justi diese Formen auf *yâres* nicht den sanskritischen auf *yâsus* parallel stellt, so kann ich mich doch nicht damit einverstanden erklären, das er sie als âtmanepadische betrachtet [1]). Davon hätte ihn schon seine eigne Auffassung von *kyâre*, als Parasmaipada und Nebenform von *kyân*, zurückhalten müssen; denn da er die Form *cikôitares* neben den auf *are* im Parasmaipada des reduplicirten Perfects aufführt, so lag zunächst in der Form kein Grund die drei Formen auf *yâres* oder *yâris* von der auf *yâre* zu scheiden. Noch weniger aber im Gebrauch und in der Bedeutung. *aiwiçac-yâres* zunächst gehört zu Verbum 1. *caç* 'geben', von welchem keine Âtmanepadaform vorkömmt; von *jam* 'gehen' kömmt zwar eine Âtmanepadaform vor, aber 3 Dual. praes., kein Potential; vielmehr erscheint

1) Dies thut, wie ich aus der eben während des Drucks mir zugegangenen 'Grammatik der altbactrischen Sprache von Spiegel' sehe, auch dieser (S. 247), was ich nicht unerwähnt lassen darf, obgleich es mich nicht bestimmt, in meiner Auffassung etwas zu ändern.

der Potential oft, aber stets im Parasmaipada, z. B. 2. sing. *jamyáo*, 3. *jamyât*, 1 plur. *jamyámá*, und 3 pl. *jamyãn*, welches nach Analogie von *hyáre*, welches auch, wie *cikôthares*, **hyáres* hätte lauten können, neben *hyãn*, nur eine Nebenform oder vielmehr nach obigem (da es für **jamyânt* steht) die organischere Form von *jamyáres* oder **ris* ist; was *buyáres *ris* betrifft, so erscheint von *bú* so wenig wie von *çac* eine Âtmanepadaform, wohl aber das Parasmaipada des Potential Aoristi der einfachsten Form (sskr. I. nach meiner Zählung), wie bei *jam*, z. B. 2 sing. *buyáo*, 3. *buyât* 1 pl. *buyamå* 2 *buyata* und 3 *buyãn* als dessen Nebenform wir ebenfalls *buyáres* oder **ris* zu betrachten haben. Was die Bedeutung anbetrifft, so würde es Papierverschwendung sein, wenn ich die Stellen, wo diese drei Formen vorkommen hier durchnehmen und zeigen wollte, dass sie nichts von einer Âtmanepada-Bed. an sich haben, sondern *jamyáres* in demselben Sinn wie *jamyãn*, *buyáres* in demselben wie *buyãn* und abgesehen von der Personendifferenz, wie die entsprechenden Parasmaipadaformen gebraucht sind; wer mir darin keinen Glauben beimessen will, kann alle hiehergehörigen Stellen mit Leichtigkeit bei Justi unter *çac*, *jam* und *bú* finden und durch eigne Erwägung derselben sich von der Richtigkeit meiner Behauptung überzeugen.

Wir erklären demnach *ares*, *are* in *yáres yáre* (in *hyáre*) genau wie *ares are* im Perfect und haben dabei noch den Vortheil, dass, während wir uns bei letzteren zum griechischen *αται, αοι* flüchten mussten, wir hier die Nebenform, wenn gleich mit verändertem oder eingebüsstem *t* (welches sich aber in lat. *sient*, *sint* = zend. *hyãn*; im Sskr., mit demselben Uebergang in *us*, wie im Perfect, in *syus* erhalten hat) im Zend selbst vor uns haben.

Beiläufig darf ich es nicht umgehen, zu bemerken, dass mit der Zurücknahme der Identification von zend. *buyáres* mit sskr. *bháyâsus* der wesentlichste der Gründe für die Erklärung der sskr. Âtmanepada- und Passiv-Endungen mit *r* vor den Personalendungen (wie in *çe-r-ate*, für organischeres *çe-r-ante*, ved. *bhare-r-ata* für organischeres *bhare-r-anta*, gewöhnlich *bhare-r-an*) aus dem Verbum *as*, welche ich am angeführten Ort (Kze Sskr. Gr. §. 160 S. 95) aufgestellt habe, wegfällt

und die Frage über die Entstehung dieses *r*, welche abgeschlossen zu sein schien, wieder eine offene wird. Man wird auf jeden Fall festhalten müssen, dass diese Formen mit *r* nur im Âtmanepada und insbesondere in passiver Bedeutung im Sskr. vorkommen; von den verwandten Sprachen scheinen sie in keiner, selbst nicht in dem sonst so treuen Gefährten des Sanskrit, dem Zend, wiedergespiegelt zu werden. Von den drei Formen auf *ấirê*, welche Justi Gramm. 605, S. 401 als 3 Plur. pf. red. Âtmanepada anführt, die man also als Reflexe der sskr. auf *re*, *ire* betrachten könnte, nämlich *fra-mravấirê*, *nighnấirê*, *âoṅhấirê*, hat die erste in der einzigen Stelle, in welcher sie vorkömmt (Yt. 13, 64), zwar als Variante *fra-mravare* (s. Justi, Gloss. *mrû*), was fast wie ein Conjunctiv Pf. Parasmaip. ohne Reduplication aussieht, die zweite *nighnấirê* wird von ihm selbst mit einem Fragezeichen versehen und ist nur eine Conjectur von Windischmann (Mithra, in den Abhandlungen zur Kunde des Orients S. 35 zu Yt. 10, 40); allein die dritte *âoṅhấirê* von *âh* = sskr. *âs*, griechisch *ησ* in *ἧμαι* u. s. w. ist unbezweifelbar, da dieses Verbum sowohl im Sskr. als Griechischen nur im Medium gebraucht wird; im Zend wird es zwar auch im Parasmaipada flectirt, allein ich bin weit entfernt, danach vermuthen zu wollen, dass diese Form eigentlich parasmaipadisch und *ấirê* nur eine phonetisch entstandene Nebenform von *are* sei; dagegen entscheidet doch wohl das damit übereinstimmend auslautende *ấirê* in den beiden andern Formen, zumal da *mrû* auch âtmanepadisch flectirt wird, die Conjectur *nighnấirê* vieles für sich hat und *jan* mit Präfix *ni* ebenfalls im Âtmanepada gebraucht wird. Aber darum ist noch keine Identification dieses *ấirê* mit dem sskr. *re* oder *ire* erlaubt. Denn wie die in den Veden nicht seltene Einbusse des anlautenden *t* in der dritten Person Sing. Präs. des Âtman. *te*, z. B. *îç-e* für *îç-te*, selbst *çobh-e* für *çobh-a-te* dafür entscheidet, dass auch die gewöhnliche Endung der 3 Sing. Pf. red. *e* (z. B. *rurud-e*) für ursprüngliches *te* steht und die dort nur gewissermassen arbiträre Einbusse des *t* hier zu einer steten, nothwendigen, geworden ist, so entscheiden auch die vedischen Formen der dritten Plur. Präs. Âtm. auf *re* verglichen mit denen auf *rate* (z. B. *duh-r-ate* und *duh-re*, vgl. in der gewöhnlichen

Sprache z. B. von *çi çe-r-ate*), dass auch das *re* der dritten Pers. Plur. Pf. Âtm. für ursprüngliches *rate* steht. Daraus folgt, dass das *i*, womit dieses *re* in der gewöhnlichen Sprache angeschlossen wird (*ire* z. B. *rurud-i-re*), wenn gleich der sskrit. Bindevokal *i* im Allgemeinen aus ursprünglichem *a* hervorgegangen ist, doch nicht auf einem speciell vorhergegangenen *a* beruht, wofür auch die in den Veden nicht seltnen Formen sprechen, in denen dieses *i* fehlt; wir haben demnach in diesem *i* den gewöhnlichen sskr. Bindevokal anzuerkennen, der sich von seiner ursprünglichen Entstehung aus *a* losgelöst und in der Gestalt *i* festgesetzt hat, kein ihm in diesem speciellen Fall vorhergegangenes *a* voraussetzt (denn ein *vid-a-r-ate* z. B. statt *vid-r-ate*, 3 Plur. von *vid* 'wissen', würde gegen alle Analogie sein). Bei einer Zusammenstellung von *âirê* mit sanskritisch *re* würde demnach das zendische *â* völlig unerklärbar bleiben. Ich bin desswegen der Ueberzeugung, dass, wie im Zend die erste Person Sing. Imperativi des Âtmanepada ganz abweichend vom Sanskrit (wo im Âtm. *âi* dem parasmaipadischen *âni* gegenübersteht), nur durch Umwandlung des im Parasmaipada auslautenden *i* in *ê* gebildet ist (z. B. *barânê* aus *barâni*), augenscheinlich zunächst nach der entschiedenen Analogie, welche in 2, 3 Sing. und 3 Plur. Präs. z. B. *hi*: *hê*; *ti*: *te*; *ñti*: *ñtê* entgegentritt, und weiter durch Einfluss des *ê*, welches auch in den übrigen belegbaren Personen des Âtm. den Auslaut bildet (Sing. 1 *ê*, Dual 3 z. B. *ôithê*, Plur. 1 *maidê*), so auch das auslautende *e* der dritten Plur. Pf. red. *are* zum Zweck der Âtmanepada-Bildung in *ê* umgewandelt ist; das lange *â* in den drei bewahrten Formen scheint mir auf einen Conjunctiv zu deuten, wofür bei *âoñhâirê* wenigstens die Verbindung mit dem Relativpronomen spricht, hinter welchem in den Veden sowohl als im Zend der Conjunctiv häufig erscheint (vgl. z. B. mit der Stelle, in welcher *âoñhâirê* vorkömmt, Yt. 10, 45, Vd. 15, 68 (Sp.), wo der Conjunctiv ebenfalls mit dem Genitiv des Pronomen relativum in Verbindung steht, Yç. 56, 10; Yt. 10, 120; 14, 48; Vd. 2, 53; 3, 63; 7, 118; 8, 36; 13, 49; 19, 78; Yt. 5, 90; u. s. w.). Das *i* hinter *â* ist durch den bekannten assimilirenden Einfluss des *ê* in der folgenden Sylbe entstanden.

Einen zweiten Einwand gegen meine in I. gegebene Erklärung der Pluralformen könnte einer oder der andre daher entnehmen, dass er es auffallend vielleicht unerklärlich fände, dass das Zend während es im Dual des Präsens des Parasmaipada nur die aus auslautendem *nti (nta)* zu auslautendem *s* umgewandelten Formen wiederspiegelt, in der dritten Person des Plur. Pf. redupl., trotz dem, dass das Perfect. auf dem Präsens beruht, den Reflex der organischeren Form auf *nti (nta)* bewahrt hätte.

Einen solchen könnte zwar eigentlich nur derjenige erheben, der nicht beachtet hätte, welche Fälle von Nebenformen in der indogermanischen Sprache und ihren besonderten Zweigen einst neben einander bestand und erst nach und nach verschwand, indem sich durch den häufigen Gebrauch ihre Identität, und dadurch die Ueberflüssigkeit aller bis auf eine dem Sprachbewusstsein eindringlich entgegendrängte und somit dahin wirkte, dass sich zuletzt eine allein geltend machte und die übrigen eliminirte; allein eben dieser Reichthum von einstigen gleich berechtigten Nebenformen verdiente wohl eine umfassendere Behandlung, die vielleicht auch dazu beitragen könnte, die im Sprachgeiste, bei der Ausscheidung der überflüssig gewordenen, wirkenden Gründe etwas genauer zu erkennen. Denn diese sind noch ein so tiefes Geheimniss, dass wir die Bevorzugung der einen oder andern Form bis jetzt fast nur dem Zufall zuzuschreiben vermögen. Eine solche Zusammenstellung und Untersuchung würde uns weit über die Gränzen unsrer Aufgabe führen. Ich beschränke mich daher darauf, — mit Uebergehung der bekannten Doppelformen, wie auch der in den älteren Stadien einer oder der andren Sprache noch bewahrten — wie z. B. der in den Veden erscheinenden Instrumentale auf *ebhis* und *ais* von Themen auf *a* (oft in einem und demselben Vers z. B. gleich Rigv. I. 1, 2), von denen die letztre im späteren Sanskrit die erstre in den Prakritsprachen sich allein festgesetzt hat, — zunächst einige entlegenere in's Gedächtniss zurückzurufen und daran die Besprechung von zwei bisher nicht richtig erkannten zu knüpfen, welche zugleich zeigen, wie lange derartige Doppelbildungen sich in einer Sprache erhalten können.

Grade im Perfectum reduplicatum finden wir im Sanskrit und damit in Uebereinstimmung im Zend, Griechischen, Lateinischen und Gothischen, in der zweiten Singularis nicht wie im Präsens die Umwandlung des *tv* des Personalpronomens *tva* in *s*, sondern im Sskr. in *th*, im Zend *t* und *th*, griechisch *ϑ*, latein. *t*, welche, wie man sie auch im Einzelnen erklären möge, was ich an einem andern Ort genauer erörtern werde, der Urform auf jeden Fall näher stehen, als das *s* des Präsens. Die Erscheinung würde sich dadurch erklären, dass sich das Perfect in Bezug auf diese Person schon zu einer Zeit aus seinem Zusammenhang mit dem Präsens herauslöste und unabhängig davon fixirte, als auch im Präsens der Uebergang von *tv* in *s* noch nicht Statt gefunden hatte.

Aehnlich könnte man in Bezug auf die in Betracht kommende Endung der dritten Person des Dual (zend. *âtare* für sskr. *atus* und beide für ursprünglicheres *atanti*) annehmen, dass sie ein Ueberrest aus der Zeit sei, wo sich das Pf. im Sprachbewusstsein vom Präsens unabhängig zu machen begann, dass sie sich in dem arischen Dialekt, welchen das Zend weiter entwickelte, fixirte, während in der Grundlage des Sanskrit der Zusammenhang zwischen Präsens und Perfect noch fortdauerte und bewirkte, dass sich hier auch diese Dualform der im Präsens geltend gewordenen Analogie einigermassen anschloss. So hätte uns das Zend, wie auch sonst so vielfach im Verhältniss zum Sanskrit (z. B. in dem Nom. sing. der Deklination der meisten consonantisch auslautenden Themen), eine gewissermassen ursprünglichere Form bewahrt. Das Auffallende, was in der Bewahrung einer solchen Form im Zend zu liegen scheint, wird noch mehr verringert, ja ganz gehoben, wenn wir mit der höchsten Wahrscheinlichkeit anerkennen müssen, dass es, im Gegensatz zu allen übrigen verwandten Sprachen und grade wiederum im Pf. reduplicatum selbst, eine wirkliche Urform uns bewahrt hat. Ich meine die zweite Person Sing. Imperativi *cicîthwâ* in der Verbindung *thwâ cicîthwâ* Yç. 42, 2 Sp. (43, 2 W.). Zweifelhaft würde diese Annahme werden, wenn Justi diese Form mit Recht unter *cit* gestellt hätte; denn nach der, mit wenigen Ausnahmen, durchgreifenden Regel hätte, im Fall *thwâ* (statt des gewöhnlichen *hvâ* und dessen phonetischen Umwandlungen für sskr. *sva*, griech. *σο*, lat. *re*) als Endung

an *cit* getreten wäre, das auslautende *t* des letzteren *s* werden müssen; allein noch weniger wahrscheinlich, ja vielmehr völlig unannehmbar, wäre die Annahme, dass *cicithwa* aus *cicit-swa* bestehe; denn der Verlust des *s* wäre im Zend, so viel mir bekannt, völlig ohne Analogie. Es ist vielmehr nicht mit Justi an das Verbum *cit* zu denken, sondern an *ci*, welches ja auch die Basis des letzteren ist. Dieses ist in der Bedeutung 'erkennen' mit dem Präfix *vi* im Zend belegt und kömmt in der Bedeutung 'wahrnehmen' in den Veden vor (s. Böhtl.-Roth 2. *ci* und vgl. 4. *ci*). Die Dehnung in der Reduplication sowohl als im Stamm hat Analogien genug (vgl. Justi Gr. §. 11 und 605 z. B. von organisch *viç* zend. *vîç*, Pf. red. *vîvîç-ê*), um diese Auffassung in phonetischer Beziehung vollständig zu schützen, und für die Stelle, in welcher diese Form vorkömmt, passt die Verbindung mit *ci* entschieden eben so gut, wenn nicht besser, als die mit *cit*; denn aus jener ergiebt sich die überlieferte Bedeutung 'lasse dich gewahren', 'offenbare dich' auf jeden Fall eben so leicht. Ist diese Auffassung richtig — und ich glaube kaum, dass man sie bezweifeln darf — so hätte sich — und zwar, wie bemerkt, wieder im Pf. red. — im Zend allein die Urform der Personalendung der zweiten Person in der ursprünglichsten Gestalt erhalten, während in der entsprechenden Person des Präsens in Uebereinstimmung mit dem Sanskrit, Griech. und Latein — von denen die ersten beiden dieselbe Umwandlung auch im Pf. zeigen, z. B. sskr. *vavṛit-sva* τέτυψο — die Umwandlung des *t* in *s* reflectirt wird. Es träte also zwischen Zend und Sskr. hier fast dasselbe Verhältniss ein, wie in Bezug auf den Dual des Pfect. im Gegensatz zu dem des Präsens.

Da wir grade eine Form des Imperativ erwähnt haben, die sich allein im Zend erhalten hat, so will ich eine andre desselben Modus daneben stellen, von der sich nur ein einziges Beispiel im Sanskrit findet. Die dritte Singularis hat im Sskr. bekanntlich zwei Formen, eine auf *tu* die andre auf *tât*; jene ist die herrschende geworden, die andre nur bei Segen gebraucht. Im Zend hat sich von der letzteren keine Spur erhalten; umgekehrt haben alle übrigen Verwandten von der erstren keine Spur, sondern die, welche eine dritte Sing. Imper. haben, reflectiren nur

die zweite Form: griech. *τω* (für *τωτ*), lateinisch *to*, altirisch *d*. An diese Form schliesst sich — nach Analogie der dritten Plur. im Verhältniss zu der dritten Sing. im Präs. Act. (sskr. *anti* zu *ti*, dorisch *ovτι* zu *τι* u. s. w. lat. *ant* zu *t*), Medii (sskr. *ante* zu *te*, griech. *ovται* zu *ται*, goth. *(a)nda* zu *da*), Imperfecti Act. (sskr. *an* für organischeres *ant* zu *t* u. s. w.), Medii (sskr. *anta* zu *ta*, griech. *ovτο* zu *το*), der ersten sskr. Form des Imperat. Activi (*antu* zu *tu*, zend. *eñtu* zu *tu*) Medii (sskr. *antâm* zu *tâm*, zend. *añtãm* zu *tãm*) — im Latein *anto (amanto) ento*, *unto*, dorisch *ovτω* und mit *ν ἐφελκ.*, welches in der gewöhnlichen Sprache stets antritt *ovτων*, (vgl. Ahrens 'de Dial. Dor.' §. 36 S. 296), altirisch *at* für einstiges *antâ*. Im Sskrit müsste *antât* entsprechen; von dieser Bildung aber hat sich nur ein einziges Beispiel erhalten *kayantât* im Naighaṇṭuka II. 14 vgl. Roth Index dazu unter *kantât*.

Es sei mir erlaubt noch ein Beispiel anzuführen, wo sich eine Doppelform in einer ganzen Categorie erhalten hat, aber in andern, eigentlich ebenfalls dazu gehörigen, fehlt.

Es ist bekannt, dass die Personalendungen des Imperfect und der dessen Analogie folgenden Tempora und Modi ursprünglich durch Abstumpfung aus denen des Präsens entstanden sind. Ich habe diese Abstumpfung dadurch erklärt, dass die Partikel, welche vor das Präsens tretend ihm, wie noch im späteren Sanskrit *purâ* 'früher' und *sma* (für *sama*) 'all', präteritale Bedeutung gab, dem allgemeinen indogermanischen Accentgesetz gemäss (wie noch im Sskrit stets und im Griech., wenn der Umfang des Wortes es zulässt) den Accent hatte; dadurch wurde der Accent so weit vom Ende des Wortes nach vorn gerückt, dass der Auslaut seine volle Aussprache nicht ohne Anstrengung zu bewahren vermochte. Im Sskr. findet in 3 Sing. und Pluralis diese Abstumpfung in der Weise statt, dass das im Präsens auslantende *e*, welches eigentlich *ai* war, seinen letzten Theil, das *i*, einbüsste, also *te* zu *ta*, *ante* zu *anta* wird; damit stimmen auch Zend und Griech., so dass dort dieselben Formen entstehen, hier *το* für *ται* und *ovτο* für *ovται*. In beiden letzteren Sprachen findet dieselbe Abstumpfung auch in der zweiten Singularis Statt, z. B. zend. Präs. *hê*, Impf. *ha* (in *uç-sayaṅha*, *çadayaṅha*, wo

nh der regelrechte zend. Reflex von *s*). Dieses *s* wird bekanntlich unter bestimmten lautlichen Verknüpfungen auch im Zend bewahrt; im Präsens ist zwar keine Form der Art in dem so geringen Umfang der Zendschriften auf uns gekommen; sie würde aber *sé* lauten und im Imperfect Aorist und Potential ihr *sa* entsprechen. Dieses *sa* erscheint in der That in mehreren zweiten Personen des Potential z. B. *yasaê-sa*, und in einer Form des Imperfects, wo jedoch *a* zu *e* weiter geschwächt und *s* mit eigentlich vorhergehendem *d* zu *ç* geworden ist (*raoçe* von *rud*). Im Griech. entsteht so *σο* aus *σαι* z. B. *ἐτίθεσο τίθεσαι*; bekanntlich wird aber *σ* zwischen zwei Vokalen im Griech. gewöhnlich ausgestossen, wodurch *ἐτίθου* und aus organischerem *ἐτύπτεσο ἐτύπτου* entsteht.

In den ersten Personen hat das Sanskrit eine andre Verstümmelung; das auslautende *e* (= *ai*) scheint nämlich seinen ersten Theil eingebüsst zu haben (vgl. weiterhin), so dass in 1 Sing. *e* zu *i*, in 1 Dual. *vahe* zu *vahi*, in 1 Pl. *mahe* zu *mahi* wird. Dieselbe Abstumpfung findet sich auch in der dritten Person Sing. Aor. Pass., wo zugleich, wie in den Veden nicht selten in 3 Sing. Präs. Âtm., und im Sanskrit überhaupt in 3 Sing. Pf. red. Âtm., der Consonant *t* eingebüsst ist, z. B. ved. *duh-e* für *duh-te*, gewöhnlich *rurud-e* für *rurud-te*, und so *a-jan-i* für *a-jan-ti*, welchem im Präsens **jan-te* entsprechen würde. An dieser Abstumpfung nimmt das Zend in 1 Sing. und 3 Sing. Aor. Pass. Antheil (z. B. Impf. *â-mravi* von *mrû*, Aor. *mênhi* = sskr. *a-mamsi* von *man*; *jaini* = sskr. *a-jani*, *vâcî* = sskr. *avâci* von *vac*, wo der Wechsel des kurzen und langen *i* im Auslaut zeigt, dass die im 1. Sing. Aorist stets erscheinende Länge keine Differenz begründet). Eine erste Person Dualis ist nicht belegbar. In der ersten Plur. ist nur der Potential belegbar und dieser zeigt durchweg die volle Präsensform (vgl. z. B. *ham-vaênôi-maidê*, *bûidhyôi-maidê* gegenüber von sskr. *budhye-mahi*). An der Richtigkeit dieser Form zu zweifeln, ist schon an und für sich kein Grund; sie erhält aber zunächst ihre Bestätigung dadurch, dass das Zend auch in 3 Dual. Impf. und Potent. (die zweite ist wiederum nicht belegbar) die im Sskr. geltend gewordene Umwandlung von *e* zu *âm* (*âthe*, *âte* zu *âthâm*, *âtâm*), d. h. zunächst Abstumpfung von *e* zu *a* und Anknüpfung von wort-

schliessendem *m* (vgl. *dhvam* aus *dhve*[1]) nicht wiederspiegelt, vgl. 3 Dual. Impf. *uç-zayôithe* = sskr. *ud-jáyetám* aber in der Präsensform *ud-jáyete*; 3 Dual. Potent. *iç-ôithe*. Ferner wird sie auch dadurch bestätigt, dass auch im Griech. in 1 pl. Impf. dieselbe Form erscheint wie im Präsens, nämlich *ἐτυπτό-μεϑα* wie *τυπτό-μεϑα*. Wir haben also anzunehmen, dass selbst bei der Trennung des Zend vom Sanskrit diese Abstumpfung von *e* zu *i* sich noch nicht so sehr festgesetzt hatte, dass sie auch vom Zend als einzig gültige übernommen ward, dass vielmehr der Gebrauch der entsprechenden Präsensform im Imperfect, wie vor Alters, auch damals noch wenigstens als Nebenform sich geltend machte.

Die zweite Sing. Imperfecti hat im Sskr. nicht den Reflex von griech. *σο* (aus *σαι*), zend. *ṅha*, *sa* (aus *hê*, *ṅhê*, *sê*), sondern eine dem Sskr. ganz eigenthümliche Personalendung *thâs*. Es ist nun aber schon in meiner kurzen Sskr. Gr. §. 158 gezeigt, dass der Imperativ wesentlich aus dem Conjunctiv des Präsens, und dem augmentlosen Imperfect (d. h. dem Imperfect in conjunctivischem Sinn) sich hervorgebildet hat, und da die Endung der zweiten Sing. des Imperativ im Âtmanepada *sva* durch ihr auslautendes *a* ganz in Harmonie mit der dritten Sing. und Plur. Impf. *ta* und *anta* tritt, so liegt die Vermuthung nahe, dass sie eine Nebenform von *thâs*, wahrscheinlich die ursprüngliche, sei und wenigstens im Allgemeinen die zendische Endung *sa* und *ṅha* und die griech. *σο* wiederspiegele. Diese Vermuthung erhält nun ihre entschiedene Bestätigung dadurch, dass im Zend, welches so sehr viel alterthümliches bewahrt hat, der Reflex dieses *sva* nicht bloss als zweite Sing. des Imperativ, sondern auch des Imperfects erscheint (in *ava-mairya-ṅuha* Yt. 22, 34, vgl. 24, 62), wie umgekehrt *ṅha* (für organisch *sa* = griech. *σο*) nicht bloss als Personalendung des Imperfects, sondern auch als die der zweiten Sing. Imperativi (in *madhaya-ṅha* Vsp. 9, 1 bei Justi s. v. *madhi* und *viça-ṅha* Vd. 2, 8, welches Justi wohl nur zufällig als 2 Impf. bezeichnet aber richtig durch 2 Imperativi übersetzt).

---

[1]) Die Dehnung des *a* ist wohl daraus zu erklären, dass das in den Mittelformen *âtha*, *âta* auslautende *a*, wie in den Veden und im Zend so oft, gedehnt wurde und sich in dieser Gestalt fixirt hatte, ehe *m* antrat.

Wir erhalten demnach das Recht *sva* als ursprünglichere Endung der zweiten Sing. Impf. Åtm. zu betrachten und dadurch zugleich die Mittelform zwischen der nur im Zend bewahrten schon erwähnten *thvá* und *sa*, *σο*; in der ursprünglichen *tva* ward demnach zuerst durch Einfluss des *v* das *t* aspirirt, dann ging es in den der Aspirate nahe verwandten Zischlaut über und endlich büsste es das *v* ein (vielleicht indem es von dem verwandten Hauch der sibilans absorbirt ward.)

Da aber die Medialformen des Imperfects auf entsprechenden des Präsens beruhen, welche einst existiren mussten, so folgt daraus, dass einst auch die 2 Sing. Präs. Åtm. Formen hatte, welche sich durch sskr. *tve*, *thve*, *sve*, *se* reflectiren würden; und diese Folgerung erhält ihre Bestätigung durch die von mir schon in meiner kurzen Sskr. Gr. a. a. O. S. 90 gegebene Erklärung der 2 Sing. Imper. des ersten griech. Aorist auf *σαι* für **σασαι* (vgl. ἵστω für ἵστασο); in diesem *σα-σαι* ist *σα* das Element des Aorist, *σαι* aber reflectirt die Bildung des Imperativs durch den Conjunctiv des Präsens; da dessen Auslaut sich auch in *âi* verwandeln kann (vgl. a. a. O. §. 157), also statt *sve* auch *svâi* eintreten konnte, so könnte das *αι* eben so gut sskr. *âi* wie *e* (in *σαι* = *se* 2 Sing. Präs. Medii) reflectiren, was ich nicht entscheiden will (ich verweise über das auslautende *αι* der Medialformen auf die scharfsinnige Untersuchung meines geehrten Freundes Ad. Kuhn, in seiner Gratulationsschrift zu Bopp's Jubiläum: Ueber das Verhältniss einiger sekundärer Medialendungen zu den primären', deren Resultaten ich jedoch mich nicht anzuschliessen vermag).

Ist durch das bisherige nachgewiesen, dass in 2, 3 Sing. und 3 Plur. die Abstumpfung der Präsensauslaute sskr. *e* u. s. w. zu *a* statt fand, so liegt es nahe zu vermuthen, dass auch in der ersten Sing. neben der zu *i* einst ebenfalls eine zu *a* existirte und diese Vermuthung erhält ihre Bestätigung durch die erste Person des Potential. Diese, nämlich *tya*, lautet auf *a* aus und besteht eigentlich nur aus *t* und *a* wie die zweite und die folgenden Personen *î-thâs*, *î-ta* u. s. w. beweisen; das *y* ist nur zur Aufhebung des Hiatus aus dem verwandten *î* hervorgetreten, ähnlich

wie *v* in 1 Sing. Aor. ***abhû-v-am*** aus ***abhû-am*** von ***bhû***, vgl. die zweite ***abhû-s*** u. s. w. Das ***a*** verhält sich aber zu der sskr. Endung des Präsens *e* genau wie ***sva*** zu ****sve***, ***ta*** zu ***te***, ***anta*** zu ***ante***. Wie im Sskr. erscheint diese Form auch in dessen treuem Gefährten, dem Zend, in ***pairi-tanu-y-a*** (= sskr. ***pari-tanv-î-y-a***) für ***-tanu-î-a***, wo also das *î* vor ***a*** wie so häufig sich liquidirt hat.

Das sskr. *e* im Präsens ist bekanntlich eine Verstümmelung von ***me*** = griech. *μαι*; demnach hätten wir eigentlich gegenüber von sskr. ***îya*** oder ursprünglicherem ***îa*** im Griechischen nach Analogie von *σο, το, οντο*: *ἱμο* zu erwarten; statt dessen tritt uns *ιμην* entgegen und dessen *μην* erscheint auch im Imperfect. Da nun sämmtliche Personalendungen des sskr. Potential Âtm. — ausser der dritten Pluralis (welche sich jedoch nur durch das vor dieselbe tretende *r* unterscheidet, nämlich ursprünglich ***î-ranta*** für ***î-anta***, verstümmelt ***î-ran***, vgl. ***vid-ate*** neben ***vid-r-ate*** u. s. w. Pâṇ. VII. 1. 7 und meine Vo. Sskr. Gr. §. 813, S. 366 mit Anm. 5), — so wie des griechischen Optativ Medii mit denen des Imperfect übereinstimmen: so ist nicht dem geringsten Zweifel zu unterwerfen, dass diese Form auf ***a*** auch der ersten Person Imperfecti angehörte; ja es scheint kaum zu bezweifeln, dass es einst die einzige Form war und die Formen auf ***i*** (nämlich noch ***vahi mahi***, so wie ***i*** der dritten Person Sing. Aor. Pass.) erst durch die so häufige Schwächung von ***a*** zu ***i*** entstanden (also letztre aus ***vaha***, ***maha***, ***a*** für ***t-a***, mit Einbusse des *t* wie in ved. ***duh-e*** für ***duh-te***) und nachdem sie zuerst Nebenformen gewesen waren, die ursprünglicheren aus dem Gebrauch — ausser in 1 Sing. des Potential und Precativ — verdrängten.

War aber einst ***a*** auch Endung der ersten Sing. Imperfecti, so entspricht ihm natürlich auch hier das griechische *μην* und für beide Formen ist eine gemeinschaftliche Grundlage zu suchen. Vergleichen wir nun das Verhältniss von sskr. ***dhvam*** (2 Plur. Impf.) zu ***dhve***, so dürfen wir unbedenklich zu dessen Erklärung auf die Abstumpfungen zu ***a*** (für organisch ***ma***) ***sva*** (zend. ***sa*** griech. *σο*) ***ta***, ***vahi*** (für ****vaha***) ***mahi*** (für ****maha***) ***i*** (für ***ta***) zurückblicken und als dessen Grundlage ebenfalls ***dhva*** betrach-

ten und diese Annahme erhält ihre vollständige Bestätigung durch das noch neben ***dhvam*** vorkommende ***dhva*** (Rigv. VIII, 2, 37 vgl. Pâṇ. VII, 1, 43); das ***m*** ist demnach ähnlich wie so oft (und z. B. wie oben gesehen in 3 Imperat. *οντω-ν*) das griech. *ν ἐφελκ.* angetreten, was im Sanskrit um so weniger auffallend ist, da hier am Ende eines Satzes noch regelmässig jedes ***a, i, u*** nasalirt werden kann (Pâṇ. VIII. 4, 57) und die aus dem Sskr. hervorgegangenen Sprachen, so wie vedische Eigenthümlichkeiten, eine entschiedene Neigung zur Nasalirung auslautender Vokale überhaupt zeigen; an einem andren Orte aber werde ich nachweisen, dass in älteren Zeiten der so dienende Nasal ***m*** war. Fast in demselben Verhältniss wie ***dhvam*** zu ***dhve***, stehen aber augenscheinlich die Personalendungen der zweiten und dritten Dualis ***âthâm âtâm*** zu den entsprechenden des Präsens ***âthe, âte;*** der Unterschied liegt nur in der Dehnung des ***a*** vor ***m***, welches man nach Analogie von ***dhvam*** kurz erwartet hätte. Mag man nun diese Länge, welche sich auch in der dritten Sing. und Plur. des Imperativ ***tâm, antâm*** gegenüber von Impf. ***ta, anta*** zeigt, auf die eine oder die andre Weise erklären — mir ist (vgl. S. 70) am wahrscheinlichsten, dass das auslautende ***a*** erst, wie im Zend und in den Veden so oft auslautende Vokale [1], gedehnt ward und dann wie in 2 Plur. (***dhva, dhvam***) der Nasal antrat —, das Verhältniss dieses ***âm*** zu ***e*** ist augenscheinlich völlig dasselbe wie das des griech. *ην* in *μην* zu *μαι* und ich wage desshalb auch in *μην* nichts weiter zu sehen als eine phonetische Umwandlung des eigentlich nach Analogie von *σο το οντο* zu erwartenden *μο* = sskr. ***a*** für organisches ***ma***. Danach ergiebt sich als die ursprüngliche Abstumpfung der Präsensendungen durchweg die Verwandlung des auslautenden ***e*** (***ai***) in ***a***. Vielleicht wird es nicht undienlich sein, diess Resultat mit seinen Hauptgrundlagen zu leichterer Uebersicht in einer kleinen Tabelle zusammenzustellen. Vom Präsens gebe ich nur die letzterreichbaren Formen; Imperfect bedeutet auch die Personalendungen des Aor. und Potential.

---

1) Vgl. Rigv. Prâtiç. VII—IX, Regnier, T. II. 16 ff. und Whitney zum Atharvav. Prâtiç. III. 16.

		Präsens	Imperfect
Sing.	1.	*mai*	*ma*[1], *a*[2], *i*[3]
	2.	*tvai*	*thvá*[4], *sva*[5], *sa*[6]
	3.	*tai*	*ta*[7], *tám*[8]
Dual.	1.	*vasdhai*[9]	*vasdha*[9], *vahi*[10]
	2.	*áthai*	*áthám*[11]
	3.	*átai*	*átám*[12]
Plur.	1.	*masdhai*[9]	*masdha*[9], *mahi*[10 13]
	2.	*sdhvai*[14]	*sdhva*[14], *dhva*[15], *dhvam*[16]
	3.	*antai*	*anta*[17], *antám*[18].

1. In μην, vergl. 2 3 Dual. *áthám átám*, 3 Sing. Plur. Imperat. *tám*, *antám* und 2 Plur. *dhva*, *dhvam*.

2. Im Sskr. Potentialis für *ma*, wie Präsens *e* für *me*.

3. Im Sskr. und Zend; gewöhnliche Schwächung von *a*.

4. Im Zend 2 Sing. Imperat. Perfecti.

5. Im Sskr. und Griech. Imperativ Sing. 2; der Reflex desselben im Zend auch 2 Sing. Impf.

6. Griechisch; dessen Reflex im Zend 2 Sing. Impf. und Imperativi.

7. Im Sskr., Zend, Griech.

8. Imperativ im Sskr. und Zend; vgl. N. 1.

9. Erschlossen aus griech. μεσθα, μεσθον und sskr. *vahi mahi* (für *vadhi madhi*) im Impf. und Imperat. nach dem Verhältniss in Note 3.

10. Vgl. vor. Note.

11. Sskr. Imperf. und Imperativ; vgl. N. 1. 8.

12. Sskr. Imperf. und Imperativ. Im Zend dient der Reflex des Präsens im Imperf. (d. h. es zeigt sich in dieser Person keine abgestumpfte Form); vgl. im Zend insbesondere Potential *içôithê*.

13. Im Zend und wohl auch im Griech. dient der Reflex des Präs. (keine abgestumpfte Form); vgl. im Zend insbesondre den Potential, z. B. *baidh-yôi-maidê*.

14. Erschlossen aus griech. σθε u. aa.

15. Vedisch.

16. Im Sskr. und Zend, Imperf. und Imperat.

17. Sskr. Zend Griech. im Imperf.

18. Sskr. und Zend im Imperativ.

Wenden wir uns jetzt zu den Doppelformen, welche wir schliesslich noch betrachten wollten. Sie betreffen ebenfalls den Optativ.

Es ist bekannt, dass im Griechischen im Activ der zusammengezogenen Verben zwei Optativformen nebeneinander bestehen, deren eine gewöhnlich die attische genannt wird. Die erste ist identisch mit derjenigen, welche sich in der Conjugation der im Präsens auf *ο* (oder *ε*) auslautenden Themen geltend gemacht hat und auf *οιμι, οις* u. s. w. auslautet; die zweite dagegen mit derjenigen, welche in der Conjugation auf *μι* herrscht und auf *ιην, ιης* u. s. w. endet. Bekanntlich scheidet sich auch im Sskr. der Potential auf ähnliche Weise, indem die Form, welche der zweiten entspricht ***yám, yás, yát*** in allen Verben gebraucht wird, welche ihr Präsensthema nicht durch Antritt eines auf ***a*** (= griech. *ο, ε*) auslautenden Elementes bilden, d. h. in der ganzen zweiten Conjugation; so würde z. B. von ***gá*** 'gehen' Präsensthema ***jigá*** und ***jagá*** der Potential ***jigá-yám*** lauten (vgl. ***jagáyát*** im Naighaṇṭuka II. 14) wie von dem entsprechenden griechischen *βᾱ*, Präsensthema *βιβα, βιβα-ίην* (vgl. Aorist II *βαίην*). In der andern Conjugation dagegen, der ersten, erscheint zwar in der ersten Singular kein Reflex des im Griechischen *οιμι* auslautenden *ι*, in allen übrigen Formen dagegen stimmt der hier gebrauchte Potential mit dem griechischen im Wesentlichen überein, z. B. Sing. 2 sskr. ***es*** = *οις*, 3 ***et*** = *οι*, Plur. 1 ***ema*** = *οιμεν*, 2 ***eta*** = *οιτε*, 3 ***eyus*** für ***eyant*** = *οιεν*. Mit dem Sskr. stimmt auch das Zend, Latein, Goth. und Slavische, z. B. sskr. von ***as*** 'sein' ***syám***, ***syás*** u. s. w. zend. ***qyém, qyáo***, lat. ***siem, siês***; sskr. von ***dá*** geben Präsensth. ***dadá***, in den schwachen Formen verstümmelt zu ***dad***, im Potential Dual. 1 ***dad-yáva***, slav. ***dad-ivě***; in der ersten Conjug. vom sskr. Präsensthema ***vah-a*** Potent. Sing. 2 ***vah-es***, zend. ***vazôis***, lat. ***vehês*** (Fut.), slav. ***vesi***. Im Goth. hat sich die dem sskr. ***yám*** u. s. w. entsprechende Form nur im Conjunctiv Präteriti erhalten; im Präsens sind alle Verben in die ***a***-Conjugation übergetreten.

Erwägt man diese Uebereinstimmung aller verwandter Sprachen im Gegensatz zum Griechischen, so kömmt man auf den ersten Anblick auf den Gedanken, dass das Griechische in der Verknüpfung dieser unzweifelhaft ursprünglicheren Form des Potentialexponenten *ιην* u. s. w.

mit den auf *ο* mit vorhergehenden *α, ε, ο,* ursprünglich auf *aya*, auslautenden Verben, auf eine kaum erklärliche Weise zu der Urform zurückgekehrt sei, wie es denn auch bei Bopp heisst (Vgl. Gr. III², §. 689 S. 17) 'ob aber die bei contrahirten Verben vorkommenden Formen *οιην, οιης* u. s. w. die Urform geschützt haben und somit die Echtheit der sanskritischen Formen wie *бár-ê-s* (für *бár-a-yâs*) überbieten, oder, ob dieselben, was wahrscheinlicher ist, durch die Analogie der *μι*-Conjugation zurückgeführt sind, mag hier unentschieden bleiben'. Ob die Conjugation auf *μι* einen solchen Einfluss auf die *ο*-Conjugation hätte haben können — was um so unwahrscheinlicher ist, da wir in vielen Fällen im Griechischen und überhaupt in allen indogermanischen Sprachen die *a*-Conjugation, d. h. die sanskritische erste, auf die Nicht-*a*-Conjugation wirken, sie bedrängen und verdrängen sehen, nie aber umgekehrt — dürfen wir um so mehr unentschieden lassen, da zwei bisher nicht in Betracht gezogene Momente uns sogleich überzeugen werden, dass die von Bopp vorangestellte Alternative das einzig richtige enthält.

Ich kenne das eine und wichtigste dieser Momente schon fast seit dreissig Jahren (aus Lassen Institutiones L. Pr. S. 358) und war schon mehreremal darauf und daran es mit den sich daran knüpfenden Folgerungen bekannt zu machen. Allein die Hoffnung, Clough's Pâli-Grammatik zu erlangen, auf welche ich schon seit zwanzig Jahren vergeblich Jagd mache, hielt mich von der Veröffentlichung zurück. Wenn ich jetzt, auch ohne dass dieser Wunsch bisher erfüllt ist, diese Stelle benutze, um es zu erörtern, so geschieht diess, theils weil in der Zwischenzeit mir dieselben Formen ausführlicher durch Muir's Sanskrit Texts II. 106 bekannt geworden sind, theils weil das zweite Moment hinzutrat.

Als Pâliform des Potentials von *pach* 'kochen' führt nämlich Muir a. a. O. auf:

Sing.	1. *pacheyyâmi*		Plur.	1. *pacheyyâma*
	2. *pacheyyâsi*			2. *pacheyyâtha*
	3. *pacheyya* oder *pache*			3. *pacheyyum*

gegenüber von sskr.

Sing.	1. *pacheyam*	Plur.	1. *pachema*
	2. *paches*		2. *pacheta*
	3. *pachet*		3. *pacheyus*

Lassen a. a. O. hat schon richtig erkannt, dass in der Pâliform eine Bildung nach der sogenannten zehnten Conj. Cl. zu Grunde liegt, welche schon im Sanskrit, Zend, am häufigsten aber in den Prakritsprachen sich an die Stelle der übrigen Präsensbildungen drängt. Es liegt also der Pâliform eine organische zu Grunde, welche, wenn wir ihr die sanskritischen Personalendungen geben, lauten würde:

pach-aya-yâm	*pach-aya-yâma*
pach-aya-yâs	*pach-aya-yâta*
pach-aya-yât	*pach-aya-yus.*

Damit stimmen aber — abgesehen von der dritten Pluralis — die griechischen Formen auf's allergenauste; z. B. *φιλ-εjo-ιην* = *φιλεο-ιην* = *φιλοίην* u. s. w.

Diese Uebereinstimmung kann aber kein Zufall sein; dass beide so lange getrennte Sprachen durch eine fast zufällige Veranlassung selbstständig zu der Urform bei Themen auf *aya* zurückgekehrt sein, ist nicht denkbar. Die Doppelbildung muss aus der Zeit vor der Sprachtrennung herrühren. Dafür entscheidet auch das zweite Moment, nämlich das Vorkommen von âtmanepadischen Formen, welche sich an diese parasmaipadische schliessen, schon in vedischen Schriften und weiter dann im Epos z. B. *kalp-ay-îran vâch-ay-îta* in Âçvalay. Gṛihyasûtr. IV. 6. 3 und 19 und viele in den epischen z. B. *çam-ay-îta* MBh. XII, 5289, vgl. meine Vollst. Sskr. Gr. S. 364 n. 3. Die Pâliformen *pacheyyâmi* u. s. w. unterscheiden sich nämlich von den erwähnten zu Grunde liegenden *pach-aya-yâm* u. s. w. (abgesehen von dem auslautenden *i*) dadurch, dass nach der im Sskr. herrschenden Regel das auslautende *a* von *aya* vor dem folgenden *y* ausgefallen (vgl. z. B. *adhi-gamaya* mit Suffix *ya*, welches *adhigamayya* wird), nicht mit diesem und dem ihm folgenden Vokal contrahirt ist, (so dass dem Pâli sskr. *pach-ay-yâm*, *-yâs* u. s. w. statt *pach-ay-eyam*, *pachayes* gegenübersteht). Dieses ist aber grade der Unterschied, durch welchen sich die erwähnten âtmanepadischen Formen

von den gewöhnlichen sanskritischen unterscheiden, z. B. ***kalp-aya*** mit ***îran*** ist ***kalpay-îran*** statt ***kalpayaîran*** = ***kalpayeran*** geworden.

Es ist danach nicht dem mindesten Zweifel zu unterwerfen, dass sich die Zusammenziehung von ***a-yâs*** z. B. zu ***es*** vor der Sprachtrennung noch nicht durchweg geltend gemacht hatte, dass sich insbesondre in den Formen auf ***aya*** die organischeren Bildungen neben den zusammengezogenen erhalten hatten und das Griechische in seinen Doppelformen, wie ***φιλοῖς*** und ***φιλοίης*** (für ***φιλ-εj-οις*** und ***φιλ-εjο-ιης***) diesen, so wie in der Nebenform des Opt. Aor. I, ***σε-ιας*** u. s. w. für ***σαις*** u. s. w. selbst den älteren Zustand, wo die Willkürlichkeit der Contraction noch weiter herrschte, noch lange nach seiner Besonderung widerspiegelt.

Die Zusammenstellung des Griechischen Optativ mit dem Potential des Pâli giebt uns aber noch eine zweite Belehrung und zwar ebenfalls in Bezug auf eine Doppelform.

Die hinter den Verben mit Präsensthemen auf ***o*** antretende Optativform, entstanden durch Contraction dieses Vokals mit dem anlautenden des Modus-Exponenten, zeigt im Griechischen im Sing. 1 die Endung ***μι***. Auch hier stand bislang die ganze Reihe der verwandten Sprachen dem Griechischen gegenüber. Anstatt nun die Frage, wie es sich damit verhalte, genauer zu untersuchen, musste sich die griechische Form, mit dem Wörtchen 'unorganisch' gebrandmarkt (Bopp Vgl. Gr. II² §. 430 S. 252. III², §. 689 S. 17, vgl. §. 705 S. 33), welches so häufig wie ein Narkotikum in der Sprachforschung gewirkt hat, gefallen lassen, gleichsam zur Thür hinausgeworfen zu werden.

Auch hier tritt das Pâli für das Griechische in die Schranken und zeigt dadurch, dass es nicht bloss in 1 Sing. ***mi*** hat, sondern auch in der zweiten Sing. ***si*** und in der zweiten Plur. das präsentive ***ttha*** (vgl. sskr. 2 Pl. Präs. ***tha***), dass auch in dem griechischen ***μι*** der Rest einer Doppelform des Potentialis bewahrt ist. Ganz wie das Griechische hat auch das Sanskrit nur diese Endung ***mi*** im Potential bewahrt, allein, so viel mir bis jetzt bekannt, nur in einem einzigen Worte und einer einzigen Stelle, nämlich in ***grihṇî-yâmi*** (im Mahâbhârata I. 3109), wo es zu allem

Ueberfluss auch durch das nebenstehende *bhavet* hinlänglich als Potential geschützt ist.

Wir dürfen demnach unbedenklich annehmen, dass der Potential ursprünglich nicht bloss durch *yâm, yâs* u. s. w. (d. h. das Imperfect von *yâ* 'gehen' in der Bed. 'erreichen wollen = wünschen' [1]), sondern auch durch *yâmi, yâsi, yâti* u. s. w. (d. h. das Präsens desselben Verbum) gebildet ward. Aehnlich aber, wie der ursprünglich eben so wohl vom Präsens als Imperfect gebildete Conjunctiv (vgl. z. B. ved. *patâti* für *pat-a-a-ti* Conj. Präs. und *patât* d. i. *pata-a-t*, Conj Impf.) im Griechischen nur noch vom Präsens gebildet wird, ohne Zweifel weil die ursprünglich verschiedene Bedeutung sich im Laufe der Zeit immer näher trat und eine Form dadurch überflüssig wurde, so wurden auch die gewiss ursprünglich ebenfalls wenn auch nur leicht verschiedenen Bedeutungen ('ich mag...' und 'ich möchte...') dieser beiden Potentiale nach und nach identisch. Die übrigen verwandten büssten in Folge davon die präsentive Form ganz ein — wie das Griechische den Conjunctiv Imperfecti — das Pâli dagegen mischte entweder beide Formen oder behielt nur die präsentive; dem Sanskrit und Griechischen verblieb nur ein Rest der letzteren in der ersten Person — ähnlich wie z. B. in der Sanskrit-Deklination der Pronomina, z. B. der von *idam*, Reste von Pronominibus geblieben sind, die einst ganz deklinirt wurden (vgl. *ena* mit lat. *oinos*, *unus*) —; im Sanskrit hat er sich nur in einem Beispiel erhalten; im Griechischen dagegen machte er sich so sehr zur herrschenden Form, dass — im reinen Widerspiel und zugleich in sonderbarem Zusammentreffen mit dem Sskr. — von seiner Nebenform *οιν* ebenfalls nur ein einziges Beispiel *τρέφοιν* (aus Eurip. im Etym. M. s. v.) aufbewahrt ist (an eine Zusammenziehung aus *οιην* für *τρεφοίην*, wie die Alten es erklärten, s. Gaisford, ist natürlich nicht zu denken, da diese noch anomaler wäre).

1) Vgl. z. B. vedisch *yâmi* in *tát tvâ yâmi* Rigv. I. 24. 11. VIII. 3. 9. 'um dieses gehe ich dich an' d. h. 'dieses bitte ich von dir', wo die alten vedischen Erklärer wegen der unzweifelhaften Bedeutung so weit gingen, *yâmi* als eine Verstümmelung von *yâchâmi* zu betrachten Nirukt. II. 1.

Durch die Erkenntniss dieser präsentiven Nebenform des Potentials wird uns endlich die Bildung des indogermanischen Futurs mit der Endung, welche im Sskr. ***syâmi*** u. s. w. lautet, vollständig klar. Dass die Categorie des Futurum in den indogermanischen Sprachen in einem nahverwandtschaftlichen Verhältniss zu dem Potential stehe, ist längst anerkannt und wird durch den häufigen Gebrauch des letzteren in Futurbedeutung (vgl. Pâṇ. III, 3, 169 und 172 und unzählige Stellen in der Literatur, wo der Potential sich der Bedeutung des Futur mehr oder weniger nähert, oder mit ihr ganz zusammenfällt) im Sanskrit, so wie durch die Verwendung des Reflexes desselben als Futur in der lateinischen dritten und vierten Conjugation in unbezweifelbarer Weise bestätigt. Bopp (Vgl. Gramm. §. 648, Bd. II², S. 541) hebt daher die nahe Verwandtschaft des Potential von ***as*** 'sein', ***syâm***, ***syâs*** u. s. w., mit den Futuralexponenten ***syâmi***, ***syasi*** u. s. w. hervor und bemerkt §. 649 a. a. O.: 'Man sieht, dass der Hauptunterschied der hier verglichenen Formen der ist, dass (1.) der Potentialis ein durchgreifendes langes ***â*** hat, das Futur aber ein kurzes, welches nach dem Princip der Klassensylben der ersten Hauptconjugation vor ***m*** und ***v*** der ersten Person verlängert wird [1]. (2.) Dann hat das Futurum die vollen primären Endungen, der Potentialis aber die stumpferen sekundären.'

Nachdem wir als Nebenform des Potential die mit den vollen primären Endungen erkannt haben, also ***syâmi***, ***syâsi*** u. s. w., fällt dieser zweite Unterschied weg und es bleibt nur der erste. Diese Verkürzung hat aber ihre Analogie zunächst in der Formation des Präsens im Passiv und der daraus hervorgegangenen Präsensthemen derjenigen Conjugations-Classe, welche im Sanskrit als die vierte aufgeführt wird, über deren Entstehung vermittelst einer Zusammensetzung mit demselben Verbum ***yâ***, welches auch den Potential bildete, schon lange kein Zweifel herrscht; ferner in dem Uebertritt der sskrit. Verba ***sthâ*** 'stehen ***pâ*** 'trinken'

1) An dieser Verlängerung nehmen die verwandten Sprachen — ausser dem Zend und auch dieses mit vielen Ausnahmen — im Dual und Plural Activi und Medii und im Singular auch im Medium keinen Antheil, z. B. ***ομεν***, ***ομεθα***, ***ομαι*** gegen sskr. *âvas*, *âmas*, *âvahe*, *âmahe*.

ghrâ 'riechen' aus der dritten in die erste Conjugationsclasse, so wie in den alten Verbalzusammensetzungen mit hinten angeschlossenen Verben auf *â*, wie z. B. *dhâ* (griech. πλη-θο aus *par-â[prâ]-dhâ* 'voll thun' d. h. 'voll machen'), *bhâ*.

Man vergleiche z. B. das Passiv von *dvish* 'hassen'

Sing. 2.	*dvish-yá-se*	für ursprüngliches	*dvish-yá-se*
3.	*dvish-yá-te*	,, ,,	*dvish-yá-te*
Plur. 2.	*dvish-yá-dhve*	,, ,,	*dvish-yâ-dhve*
3.	*dvish-y(á)-ante*	,, ,,	*dvish-yâ-ante*

das Verbum *nṛit* der vierten Conj.-Cl.

Sing. 2.	*nṛit-ya-si*	,, ,,	*nṛit-yâ-si*
3.	*nṛit-ya-ti*	,, ,,	*nṛit-yâ-ti*
Dual. 2.	*nṛit-ya-thas*	,, ,,	*nṛit-yâ-thas*
3.	*nṛit-ya-tas*	,, ,,	*nṛit-yâ-tas*
Plur. 2.	*nṛit-ya-tha*	,, ,,	*nṛit-yâ-tha*
3.	*nṛit-y(a)-anti*	,, ,,	*nṛit-yâ-(a)anti*

und das Präsens von *sthâ*, wo das Griechische im Singular noch die ursprüngliche Länge, und somit die Vermittlung zwischen der Urform und der sanskritischen bewahrt hat.

Sing. 2.	*tishṭha-si*	für ursprüngliches	*tishṭhâ-si* (ἵστης)
3.	*tishṭha-ti*	,, ,,	*tishṭhâ-ti* (ἵστησι)

u. s. w.

Wie diese Verkürzungen zu erklären sind, wird sich wohl nicht mit voller Gewissheit herausbringen lassen. Mir ist am wahrscheinlichsten, dass einerseits die Länge der Wörter, andrerseits die Analogie der immer mächtiger in das Gebiet der ursprünglichen Conjugation eingreifenden Flexion der Präsentia auf *a* dazu zusammenwirkten.

Nach allen diesen Analogien ist nicht zu bezweifeln, dass ursprünglich ein Potential von *as* 'sein' in der Form *(a)syâmi*, *(a)syâsi*, *(a)syâti* u. s. w. bestand und in seiner Verwendung als Futurexponent in 2 Sing. und allen folgenden Formen, auch denen des Medii das *a* verkürzte — nur im Sskr. (und vielleicht Zend, wo aber für 1. Dual und Plur. des Fut. Belege fehlen), wo die, schon in der Ursprache in 1 Sing. Act.

geltend gewordene rein phonetische Dehnung von *a* vor *m*, auch auf den Plur. und das *v* des Dual und zwar auch im Âtmanepada ausgedehnt ward, ist die Dehnung in den ersten Personen Dual. und Plur. scheinbar zurückgekehrt. Als eigentliche Bedeutung des Futurexponenten ist danach aufzustellen 'ich mag sein'. oder 'ich will sein', wo 'sein' aber eben so bedeutungslos ist, wie in den oben angeführten Fällen, wo es die Funktion von Personalendungen übernimmt (S. 55), so dass diese Bildung fast ganz der periphrastischen englischen durch shall und will entspricht.

Ehe ich diese Erörterung schliesse, muss ich, so ungern ich mich auch auf das Gebiet des homerischen Sprachgebrauchs einlasse, da ich wohl fühle, dass meine lange Entfremdung von der klassischen Philologie mich leicht hier zu Irrthümern führen kann, doch bemerken, dass Formen wie *δαμείω* Od. *σ*, 54 *θείω* Il. *Π*, 83 und, da wir die Verkürzung des ursprünglichen *ά* im Futur entschieden festgestellt haben, auch *δαμείετε* Il. H. 72. *θείομεν* Od. *φ*. 264 u. s. w. (vgl. alles hieher gehörige bei Imman. Becker in 'Sitzungsberichte der Berl. Ak. d. W. 1861 S. 241 ff.') der Form nach bei weitem eher Optative mit Präsensendung als Conjunctive zu sein scheinen; und selbst wenn der Sprachgebrauch nöthigt, sie vom begrifflichen Standpunkte aus der Categorie des Conjunctiv zuzuordnen, liesse sich annehmen, dass wie im Lateinischen durchweg, so auch im Griechischen vor Alters eine Mischung des Potential und Conjunctiv eingetreten sei [1]), von der uns im Gebrauch derartiger Formen

1) Vgl. die Vereinigung des Potential und Conjunctiv zu einem Modus im Latein (*legam* Conj., *sim* Optativ), auch die Erklärung des armenischen Futur aus dem Potential bei Bopp Vgl. Gr.[2]. Vorrede XV und Bd. 2. p. 371 ff. und bei Fr. Müller Beiträge zur Conjugation des armenischen Verbum in Sitzungsber. der Wien. Ak. phil.-hist. Cl. XIII, 337; ferner die Vertauschung beider Modi im Sskr. (Pâṇini, III. 4. 7) und gegenüber der Verwendung des erstren zum Ausdruck des Futur (*leges* u. s. w.) die, wie bemerkt, ebenfalls ihre Analogie im Sskr. hat, auch die in den Veden erscheinende Verwendung des Conjunctivs zu demselben Zweck (vgl. z. B. Anm. 1234 zu meiner Uebersetzung des Rigveda im Or. und Occ. III, S. 154), welche noch viel weiter im Zend ausgedehnt ist, so dass hier der Conjunctiv und Potential das fast ausgestorbene Futurum ersetzen.

ein Rest erhalten ist. Es liegt diese Vermuthung um so näher, da sich vorzugsweise durch diese Annahme der Verlust des Conjunctiv Imperfecti und des präsentiven Potentials im Griechischen und des letzteren auch im Sanskrit erklären würde.

Ich habe im Bisherigen nur einige Doppel- und Nebenformen in Betracht gezogen, welche dem Gebiete der Grammatik, der Formation, angehören. Eben so belehrend und theilweise noch interessanter würde die Erwägung der vielfachen doppelten und mehrfachen Ausdrücke für den materiellen Theil der Sprache sein, welche ursprünglich in mehr oder weniger verschiedener Bedeutung neben einander existirten, dann sich in ihren Bedeutungen immer näher rückten und in Folge davon die einen die andern ganz verdrängten oder sich mit ihnen zu einem Flexionssysteme verbanden; so fing schon vor der Sprachtrennung das Verbum, welches im Sskr. ***spaç*** lautete, an das Verbum ***darç*** zu verdrängen, so dass z. B. im Latein keine Spur desselben mehr existirt; im Sskr. vereinigen sich ***aj*** und ***vî*** zu einem Verbalsystem; im Lateinischen ***fer*** und ***tul (tla)***, im Althochdeutschen hat schon ***tragan*** (eigentlich 'befestigen' sskr. ***darh*** in ***dṛiddha*** 'fest' ***dṛimh*** 'fest machen', zend. ***darez*** mit der Präfix ***â*** 'binden', slav. дръжати 'halten', russ. держишь 'halten', goth. ***dragan*** 'aufladen' 'tragen') das noch im Gothischen in seiner eigentlichen Bedeutung bestehende ***beran*** (goth. ***bairan***) aus dieser verdrängt. Am interessantesten ist hier die Geschichte der Verba ***as*** 'sein' und ***bhû*** ursprünglich 'werden', welche, wie man deutlich nachweisen kann, ursprünglich beide vollberechtigt und zu jeder aus Verben entwickelbaren Bildung fähig waren, nach und nach aber sich einander immer mehr bedrängten und verdrängten, bis vom zweiten in unsrer Muttersprache nur noch zwei Formen 'bin, bist' übrig geblieben sind. Doch für jetzt genug hiervon; es wird sich mir vielleicht bald eine andre Gelegenheit bieten, darauf zurückzukommen.

